Matemática II

Examen parcial 3. Guías 12 – 16.

Farith Briceño - 2016

Material en revisión

Indice

Método de integración: Descomposición en fracciones simples.

Objetivos a cubrir **Código : MAT-CI.12**

- Método de integración: Descomposición en fracciones simples.

Ejercicios resueltos

Ejemplo 275 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{2x^2 - x - 30}{x^2 - x - 6}\, dx.$

Solución : Observemos que el grado del polinomio de numerador es igual al grado del polinomio del denominador, así, debemos dividir los polinomios

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 - x - 30 & x^2 - x - 6 \\ \cline{2-2} -2x^2 + 2x + 12 & 2 \\ \cline{1-1} x - 18 & \end{array}$$

es decir,

$$\frac{2x^2 - x - 30}{x^2 - x - 6} = 2 + \frac{x - 18}{x^2 - x - 6}.$$

Por lo tanto

$$\int \frac{2x^2 - x - 30}{x^2 - x - 6}\, dx = \int \left(2 + \frac{x - 18}{x^2 - x - 6} \right) dx = \int 2\, dx + \int \frac{x - 18}{x^2 - x - 6}\, dx.$$

La primera integral del lado derecho de la igualdad es sencilla,

$$\int 2\, dx = 2x + C_1$$

La segunda integral la resolvemos por el método de las fracciones simples. Factorizamos el denominador

$$x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3).$$

Escribimos las fracciones simples correspondientes

$$\frac{x - 18}{x^2 - x - 6} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x - 3}$$

Buscamos los valores de las constantes A y B, para los cuales la igualdad se satisfaga, para ello aplicamos el método de los coeficientes indeterminados

$$\frac{x - 18}{x^2 - x - 6} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x - 3} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{x - 18}{x^2 - x - 6} = \frac{A(x - 3) + B(x + 2)}{(x + 2)(x - 3)},$$

de aquí,

$$x - 18 = A(x - 3) + B(x + 2).$$

Para obtener los valores de las constantes le damos valores arbitrarios a x.

Si $x = 3$, sustituimos en la igualdad $x - 18 = A(x - 3) + B(x + 2)$ y se tiene

$$(3) - 18 = A((3) - 3) + B((3) + 2) \quad \Longrightarrow \quad -15 = A(0) + B(5) \quad \Longrightarrow \quad -15 = 5B,$$

de aquí $\boxed{B = \dfrac{-15}{5} = -3}$

Si $x = -2$, sustituimos en la igualdad $x - 18 = A(x - 3) + B(x + 2)$ y se tiene

$$(-2) - 18 = A((-2) - 3) + B((-2) + 2) \quad \Longrightarrow \quad -20 = A(-5) + B(0) \quad \Longrightarrow \quad -20 = -5A,$$

de aquí $\boxed{A = \dfrac{-20}{-5} = 4}$

Entonces

$$\frac{x-18}{x^2-x-6} = \frac{4}{x+2} + \frac{-3}{x-3},$$

por lo tanto,

$$\int \frac{x-18}{x^2-x-6}\, dx = \int \left(\frac{4}{x+2} + \frac{-3}{x-3} \right) dx = \int \frac{4}{x+2}\, dx + \int \frac{-3}{x-3}\, dx.$$

La primera integral del lado derecho de la igualdad se resuelve con el cambio de variable

$$u = x + 4 \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{4}{x+4}\, dx = 4 \int \frac{du}{u} = 4 \ln |u| + C_2 = 4 \ln |x+4| + C_2.$$

La segunda integral del lado derecho de la igualdad se resuelve con el cambio de variable

$$u = x - 3 \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{-3}{x-3}\, dx = -3 \int \frac{du}{u} = -3 \ln |u| + C_3 = -3 \ln |x-3| + C_3.$$

Así,

$$\int \frac{2x^2-x-30}{x^2-x-6}\, dx = \int 2\, dx + \int \frac{x-18}{x^2-x-6}\, dx = \int 2\, dx + \int \frac{4}{x+2}\, dx + \int \frac{-3}{x-3}\, dx$$

$$= 2x + 4 \ln |x+2| - 3 \ln |x-3| + C.$$

Finalmente,

$$\int \frac{2x^2-x-30}{x^2-x-6}\, dx = 2x + 4 \ln |x+2| - 3 \ln |x-3| + C.$$

★

Ejemplo 276 : *Integre* $\displaystyle\int \frac{3x-4x^2+4x^3-4}{1-2x^2-x}\, dx.$

Solución : Observemos que el grado del polinomio de numerador es mayor que el grado del polinomio del denominador, así, debemos dividir los polinomios

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 - 4x^2 + 3x - 4 & -2x^2 - x + 1 \\ \cline{2-2} -4x^3 - 2x^2 + 2x & -2x + 3 \\ \cline{1-1} -6x^2 + 5x - 4 & \\ 6x^2 + 3x - 3 & \\ \cline{1-1} 8x - 7 & \end{array}$$

Luego

$$\frac{4x^3-4x^2+3x-4}{1-2x^2-x}=-2x+3+\frac{8x-7}{1-2x^2-x}.$$

Por lo tanto,

$$\int\frac{4x^3-4x^2+3x-4}{1-2x^2-x}\,dx=\int\left(-2x+3+\frac{8x-7}{1-2x^2-x}\right)dx=-\int 2x\;dx+\int 3\;dx+\int\frac{8x-7}{1-2x^2-x}\;dx.$$

La primera y la segunda integral del lado derecho de la igualdad son sencillas,

$$-\int 2x\;dx=-x^2+C_1 \qquad \text{y} \qquad \int 3\;dx=3x+C_2.$$

La tercera integral la resolveremos por el método de las fracciones simples. Factorizamos el denominador

$$1-2x^2-x=(x+1)(1-2x).$$

Escribimos las fracciones simples correspondientes

$$\frac{8x-7}{1-2x^2-x}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{1-2x}$$

Buscamos los valores de las constantes A y B, para los cuales la igualdad se satisfaga, para ello aplicamos el método de los coeficientes indeterminados

$$\frac{8x-7}{1-2x^2-x}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{1-2x} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{8x-7}{1-2x^2-x}=\frac{A(1-2x)+B(x+1)}{(x+1)(1-2x)},$$

de aquí,

$$8x-7=A(1-2x)+B(x+1).$$

Para obtener los valores de las constantes le damos valores arbitrarios a x.

Si $x=-1$, sustituimos en la igualdad $8x-7=A(1-2x)+B(x+1)$ y se tiene

$$8(-1)-7=A(1-2(-1))+B((-1)+1) \quad \Longrightarrow \quad -15=A(3)+B(0) \quad \Longrightarrow \quad -15=3A,$$

de aquí $\boxed{A=\dfrac{-15}{3}=-5}$

Si $x=\dfrac{1}{2}$, sustituimos en la igualdad $8x-7=A(1-2x)+B(x+1)$ y se tiene

$$8\left(\frac{1}{2}\right)-7=A\left(1-2\left(\frac{1}{2}\right)\right)+B\left(\left(\frac{1}{2}\right)+1\right) \quad \Longrightarrow \quad -3=A(0)+B\left(\frac{3}{2}\right) \quad \Longrightarrow \quad -3=\frac{3}{2}B,$$

de aquí $\boxed{B=\dfrac{-3}{\frac{3}{2}}=-\dfrac{6}{3}=-2}$

Entonces

$$\frac{8x-7}{1-2x^2-x}=\frac{-5}{x+1}+\frac{-2}{1-2x},$$

por lo tanto,

$$\int\frac{8x-7}{1-2x^2-x}\;dx=\int\left(\frac{-5}{x+1}+\frac{-2}{1-2x}\right)dx=\int\frac{-5}{x+1}\;dx+\int\frac{-2}{1-2x}\;dx.$$

La primera integral del lado derecho de la igualdad se resuelve haciendo el cambio de variable

$$u = x + 1 \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{-5}{x+1}\, dx = -5 \int \frac{du}{u} = -5 \ln|u| + C_3 = -5 \ln|x+1| + C_3.$$

La segunda integral del lado derecho de la igualdad se resuelve con el cambio de variable

$$u = 1 - 2x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = -2\, dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{-2}{1-2x}\, dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C_4 = \ln|1-2x| + C_4.$$

Así,

$$\begin{aligned}\int \frac{4x^3 - 4x^2 + 3x - 4}{1 - 2x^2 - x}\, dx &= -\int 2x\, dx + \int 3\, dx + \int \frac{8x - 7}{1 - 2x^2 - x}\, dx \\ &= -\int 2x\, dx + \int 3\, dx + \int \frac{-5}{x+1}\, dx + \int \frac{-2}{1-2x}\, dx \\ &= -x^2 + 3x - 5\ln|x+1| + \ln|1-2x| + C.\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\int \frac{3x - 4x^2 + 4x^3 - 4}{1 - 2x^2 - x}\, dx = 3x - x^2 - 5\ln|x+1| + \ln|1-2x| + C.$$

★

Ejemplo 277 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{x + x^2 + 1}{x^3 + x}\, dx.$

Solución : Como el grado del polinomio de numerador es menor que el grado del polinomio del denominador no se dividen los polinomios, así resolvemos la integral por el método de las fracciones simples. Factorizamos el denominador

$$x^3 + x = x\left(x^2 + 1\right).$$

Escribimos las fracciones simples correspondientes

$$\frac{x + x^2 + 1}{x^3 + x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}.$$

Buscamos los valores de las constantes A, B y C, para los cuales la igualdad se satisfaga, para ello aplicamos el método de los coeficientes indeterminados

$$\frac{x + x^2 + 1}{x^3 + x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{x + x^2 + 1}{x^3 + x} = \frac{A\left(x^2 + 1\right) + (Bx + C)\,x}{x\,(x^2 + 1)},$$

de aquí,

$$x + x^2 + 1 = A\left(x^2+1\right) + (Bx + C)\,x.$$

Para obtener los valores de las constantes le damos valores arbitrarios a x.

Si $x = 0$, sustituimos en la igualdad $x + x^2 + 1 = A\left(x^2+1\right) + (Bx + C)\,x$ y se tiene

$$(0) + (0)^2 + 1 = A\left((0)^2+1\right) + (B\,(0) + C)\,(0) \quad \Longrightarrow \quad 1 = A\,(1) + (0 + C)\,(0) \quad \Longrightarrow \quad 1 = A,$$

de aquí $\boxed{A = 1}$

Si $x = 1$, sustituimos en la igualdad $x + x^2 + 1 = A\left(x^2+1\right) + (Bx + C)\,x$ y se tiene

$$(1) + (1)^2 + 1 = A\left((1)^2+1\right) + (B\,(1) + C)\,(1) \quad \Longrightarrow \quad 3 = A\,(2) + (B + C)\,(1) \quad \Longrightarrow \quad 3 = 2A + B + C,$$

como $A = 1$, obtenemos

$$3 = 2\,(1) + B + C \qquad \Longrightarrow \qquad 3 = 2 + B + C,$$

de aquí $\boxed{B + C = 1}$

Si $x = -1$, sustituimos en la igualdad $x + x^2 + 1 = A\left(x^2+1\right) + (Bx + C)\,x$ y se tiene

$$(-1) + (-1)^2 + 1 = A\left((-1)^2+1\right) + (B\,(-1) + C)\,(-1) \quad \Longrightarrow \quad 1 = A\,(2) + (-B + C)\,(-1)$$

$$\Longrightarrow \quad 1 = 2A + B - C,$$

como $A = 1$, obtenemos

$$1 = 2\,(1) + B - C \qquad \Longrightarrow \qquad 1 = 2 + B - C,$$

de aquí $\boxed{B - C = -1}$

Resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{l} B + C = 1 \\ \\ B - C = -1 \end{array}\right. \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{B = 0} \quad \text{y} \quad \boxed{C = 1.}$$

Entonces

$$\frac{x + x^2 + 1}{x^3 + x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{x + x^2 + 1}{x^3 + x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2 + 1},$$

por lo tanto,

$$\int \frac{x + x^2 + 1}{x^3 + x}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2+1}\right) dx = \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx.$$

La primera integral del lado derecho de la igualdad es de tabla, nos da

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C_1.$$

La segunda integral del lado derecho de la igualdad también es de tabla y tenemos

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x + C_2.$$

Finalmente
$$\int \frac{x+x^2+1}{x^3+x}\,dx = \ln|x| + \arctan x + C.$$

★

Ejemplo 278 : *Integre* $\displaystyle\int \frac{13x-2x^2+5}{x^3-x^2-7x+15}\,dx.$

Solución : Como el grado del polinomio de numerador es menor que el grado del polinomio del denominador no se dividen los polinomios, así resolvemos la integral por el método de las fracciones simples. Factorizamos el denominador
$$x^3-x^2-7x+15 = (x+3)\left(x^2-4x+5\right).$$

Escribimos las fracciones simples correspondientes
$$\frac{13x-2x^2+5}{x^3-x^2-7x+15} = \frac{A}{x+3} + \frac{Bx+C}{x^2-4x+5}.$$

Buscamos los valores de las constantes A, B y C, para los cuales la igualdad se satisfaga, para ello aplicamos el método de los coeficientes indeterminados
$$\frac{13x-2x^2+5}{x^3-x^2-7x+15} = \frac{A}{x+3} + \frac{Bx+C}{x^2-4x+5} \quad\Longrightarrow\quad \frac{13x-2x^2+5}{x^3-x^2-7x+15} = \frac{A\left(x^2-4x+5\right)+(Bx+C)(x+3)}{(x+3)\left(x^2-4x+5\right)},$$

de aquí,
$$13x-2x^2+5 = A\left(x^2-4x+5\right)+(Bx+C)(x+3).$$

Para obtener los valores de las constantes le damos valores arbitrarios a x.

Si $x=-3$, sustituimos en la igualdad $13x-2x^2+5 = A\left(x^2-4x+5\right)+(Bx+C)(x+3)$ y se tiene
$$13(-3)-2(-3)^2+5 = A\left((-3)^2-4(-3)+5\right)+(B(-3)+C)((-3)+3)$$
$$\Longrightarrow\quad -39-18+5 = A(9+12+5)+(-3B+C)(0) \quad\Longrightarrow\quad -52=26A,$$

de aquí $\boxed{A=-2}$

Si $x=1$, sustituimos en la igualdad $13x-2x^2+5 = A\left(x^2-4x+5\right)+(Bx+C)(x+3)$ y se tiene
$$13(1)-2(1)^2+5 = A\left((1)^2-4(1)+5\right)+(B(1)+C)((1)+3)$$
$$\Longrightarrow\quad 13-2+5 = A(1-4+5)+(B+C)(4) \quad\Longrightarrow\quad 16=2A+4B+4C,$$

como $A=-2$, tenemos
$$16=2(-2)+4B+4C \quad\Longrightarrow\quad 16=-4+4B+4C,$$

de aquí $\boxed{4B+4C=20.}$

Si $x=-1$, sustituimos en la igualdad $13x-2x^2+5 = A\left(x^2-4x+5\right)+(Bx+C)(x+3)$ y se tiene
$$13(-1)-2(-1)^2+5 = A\left((-1)^2-4(-1)+5\right)+(B(-1)+C)((-1)+3)$$
$$\Longrightarrow\quad -13-2+5 = A(1+4+5)+(-B+C)(2) \quad\Longrightarrow\quad -10=10A-2B+2C,$$

como $A = -2$, tenemos

$$-10 = 10\,(-2) - 2B + 2C \qquad \Longrightarrow \qquad -10 = -20 - 2B + 2C,$$

de aquí $\boxed{-2B + 2C = 10.}$

Resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 4B + 4C = 20 \\ -2B + 2C = 10 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{B = 0} \quad \text{y} \quad \boxed{C = 5.}$$

Entonces

$$\frac{13x - 2x^2 + 5}{x^3 - x^2 - 7x + 15} = \frac{A}{x+3} + \frac{Bx + C}{x^2 - 4x + 5} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{13x - 2x^2 + 5}{x^3 - x^2 - 7x + 15} = \frac{-2}{x+3} + \frac{5}{x^2 - 4x + 5},$$

por lo tanto,

$$\int \frac{13x - 2x^2 + 5}{x^3 - x^2 - 7x + 15}\, dx = \int \left(\frac{-2}{x+3} + \frac{5}{x^2 - 4x + 5} \right) dx = \int \frac{-2\; dx}{x+3} + \int \frac{5\; dx}{x^2 - 4x + 5}.$$

La primera integral del lado derecho de la igualdad se resuelve haciendo el cambio de variable

$$u = x + 3 \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{-2}{x+3}\; dx = -2 \int \frac{du}{u} = -2 \ln |u| + C_1 = -2 \ln |x + 3| + C_1.$$

La segunda integral del lado derecho de la igualdad se resuelve completando cuadrado

$$x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1,$$

se obtiene

$$\int \frac{5}{x^2 - 4x + 5}\; dx = 5 \int \frac{dx}{(x-2)^2 + 1}$$

se propone el cambio de variable

$$u = x - 3 \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{dx}{(x-2)^2 + 1} = \int \frac{du}{u^2 + 1} = \arctan u + C_2 = \arctan (x - 2) + C_2,$$

y la primitiva es

$$\int \frac{5}{x^2 - 4x + 5}\; dx = 5 \int \frac{dx}{(x-2)^2 + 1} = 5 \arctan (x - 2) + C_2.$$

Así,

$$\int \frac{13x - 2x^2 + 5}{x^3 - x^2 - 7x + 15}\, dx = \int \frac{-2\ dx}{x+3} + \int \frac{5\ dx}{x^2 - 4x + 5} = -2\ln|x+3| + 5\arctan(x-2) + C.$$

Finalmente

$$\int \frac{13x - 2x^2 + 5}{x^3 - x^2 - 7x + 15}\, dx = 5\arctan(x-2) - 2\ln|x+3| + C.$$

★

Ejemplo 279 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{13x + x^2 + 48}{119x + 19x^2 + x^3 + 245}\, dx.$

Solución : Como el grado del polinomio de numerador es menor que el grado del polinomio del denominador no se dividen los polinomios, así resolvemos la integral por el método de las fracciones simples. Factorizamos el denominador

$$119x + 19x^2 + x^3 + 245 = (x+5)(x+7)^2.$$

Escribimos las fracciones simples correspondientes

$$\frac{13x + x^2 + 48}{119x + 19x^2 + x^3 + 245} = \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x+7} + \frac{C}{(x+7)^2}.$$

Buscamos los valores de las constantes A, B y C, para los cuales la igualdad se satisfaga, para ello aplicamos el método de los coeficientes indeterminados

$$\frac{13x + x^2 + 48}{119x + 19x^2 + x^3 + 245} = \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x+7} + \frac{C}{(x+7)^2}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{13x + x^2 + 48}{119x + 19x^2 + x^3 + 245} = \frac{A(x+7)^2 + B(x+5)(x+7) + C(x+5)}{(x+7)^2(x+5)},$$

de aquí,

$$13x + x^2 + 48 = A(x+7)^2 + B(x+5)(x+7) + C(x+5).$$

Para obtener los valores de las constantes le damos valores arbitrarios a x.

Si $x = -5$, sustituimos en la igualdad $13x + x^2 + 48 = A(x+7)^2 + B(x+5)(x+7) + C(x+5)$ y se tiene

$$13(-5) + (-5)^2 + 48 = A((-5)+7)^2 + B((-5)+5)((-5)+7) + C((-5)+5)$$

$$\Longrightarrow \quad -65 + 25 + 48 = A(2)^2 + B(0)(2) + C(0) \quad \Longrightarrow \quad 8 = 4A,$$

de aquí $\boxed{A = 2.}$

Si $x = -7$, sustituimos en la igualdad $13x + x^2 + 48 = A(x+7)^2 + B(x+5)(x+7) + C(x+5)$ y se tiene

$$13(-7) + (-7)^2 + 48 = A((-7)+7)^2 + B((-7)+5)((-7)+7) + C((-7)+5)$$

$$\Longrightarrow \quad -91 + 49 + 48 = A(0)^2 + B(-2)(0) + C(-2) \quad \Longrightarrow \quad 6 = -2C,$$

de aquí $\boxed{C = -3.}$

Si $x = 0$, sustituimos en la igualdad $13x + x^2 + 48 = A(x+7)^2 + B(x+5)(x+7) + C(x+5)$ y se tiene

$$13(0) + (0)^2 + 48 = A((0)+7)^2 + B((0)+5)((0)+7) + C((0)+5)$$

$$\Longrightarrow \qquad 0 + 0 + 48 = A(7)^2 + B(5)(7) + C(5) \qquad \Longrightarrow \qquad 48 = 49A + 35B + 5C,$$

como $A = 2$ y $C = -3$, se tiene que

$$48 = 49(2) + 35B + 5(-3) \qquad \Longrightarrow \qquad 48 = 98 + 35B - 15 \qquad \Longrightarrow \qquad -35 = 35B,$$

de aquí $\boxed{B = -1.}$

Entonces

$$\frac{13x + x^2 + 48}{119x + 19x^2 + x^3 + 245} = \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x+7} + \frac{C}{(x+7)^2}$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{13x + x^2 + 48}{119x + 19x^2 + x^3 + 245} = \frac{2}{x+5} + \frac{-1}{x+7} + \frac{-3}{(x+7)^2},$$

por lo tanto,

$$\int \frac{13x + x^2 + 48}{119x + 19x^2 + x^3 + 245}\, dx = \int \left(\frac{2}{x+5} + \frac{-1}{x+7} + \frac{-3}{(x+7)^2} \right) dx = \int \frac{2\ dx}{x+5} + \int \frac{-\ dx}{x+7} + \int \frac{-3\ dx}{(x+7)^2}.$$

La primera integral del lado derecho de la igualdad se resuelve haciendo el cambio de variable

$$u = x + 5 \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{2}{x+5}\, dx = 2\int \frac{du}{u} = 2\ln|u| + C_1 = 2\ln|x+5| + C_1.$$

La segunda integral del lado derecho de la igualdad se resuelve haciendo el cambio de variable

$$u = x + 7 \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{-1}{x+7}\, dx = -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C_2 = -\ln|x+7| + C_2.$$

La tercera integral del lado derecho de la igualdad se resuelve haciendo el mismo cambio de variable utilizado para resolver la segunda integral

$$u = x + 7 \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{-3}{(x+7)^2}\,dx = -3\int \frac{du}{u^2} = 3\,\frac{1}{u} + C_3 = \frac{3}{x+7} + C_3.$$

Así,

$$\int \frac{13x + x^2 + 48}{119x + 19x^2 + x^3 + 245}\,dx = \int \frac{2\,dx}{x+5} + \int \frac{-\,dx}{x+7} + \int \frac{-3\,dx}{(x+7)^2} = 2\ln|x+5| - \ln|x+7| + \frac{3}{x+7} + C.$$

Finalmente

$$\int \frac{13x + x^2 + 48}{119x + 19x^2 + x^3 + 245}\,dx = 2\ln|x+5| - \ln|x+7| + \frac{3}{x+7} + C.$$

★

Ejemplo 280 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{5x^2 - 10x - 4x^3 + 5}{2x^2 - 2x - 2x^3 + x^4 + 1}\,dx.$

Solución : Como el grado del polinomio de numerador es menor que el grado del polinomio del denominador no se dividen los polinomios, así resolvemos la integral por el método de las fracciones simples. Factorizamos el denominador

$$2x^2 - 2x - 2x^3 + x^4 + 1 = \left(x^2+1\right)(x-1)^2.$$

Escribimos las fracciones simples correspondientes

$$\frac{5x^2 - 10x - 4x^3 + 5}{2x^2 - 2x - 2x^3 + x^4 + 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Buscamos los valores de las constantes A, B, C y D, para los cuales la igualdad se satisfaga, para ello aplicamos el método de los coeficientes indeterminados

$$\frac{5x^2 - 10x - 4x^3 + 5}{2x^2 - 2x - 2x^3 + x^4 + 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{5x^2 - 10x - 4x^3 + 5}{2x^2 - 2x - 2x^3 + x^4 + 1} = \frac{A(x-1)\left(x^2+1\right) + B\left(x^2+1\right) + (Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)},$$

de aquí,

$$5x^2 - 10x - 4x^3 + 5 = A(x-1)\left(x^2+1\right) + B\left(x^2+1\right) + (Cx+D)(x-1)^2.$$

Para obtener los valores de las constantes le damos valores arbitrarios a x.

Si $x = 1$, sustituimos en la igualdad

$$5x^2 - 10x - 4x^3 + 5 = A(x-1)\left(x^2+1\right) + B\left(x^2+1\right) + (Cx+D)(x-1)^2$$

y se tiene

$$5(1)^2 - 10(1) - 4(1)^3 + 5 = A((1)-1)\left((1)^2+1\right) + B\left((1)^2+1\right) + (C(1)+D)((1)-1)^2$$

$$\Longrightarrow \quad 5 - 10 - 4 + 5 = A(0)(2) + B(2) + (C+D)(0)^2 \quad \Longrightarrow \quad -4 = 2B,$$

de aquí $\boxed{B = -2.}$

Si $x = 0$, sustituimos en la igualdad

$$5x^2 - 10x - 4x^3 + 5 = A(x-1)\left(x^2+1\right) + B\left(x^2+1\right) + (Cx+D)(x-1)^2$$

y se tiene

$$5(0)^2 - 10(0) - 4(0)^3 + 5 = A((0)-1)\left((0)^2+1\right) + B\left((0)^2+1\right) + (C(0)+D)((0)-1)^2$$

$$\Longrightarrow \qquad 0 - 0 - 0 + 5 = A(-1)(1) + B(1) + (D)(-1)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad 5 = -A + B + D,$$

como $B = -2$, se tiene que

$$5 = -A + (-2) + D \qquad \Longrightarrow \qquad 7 = -A + D,$$

de aquí $\boxed{-A + D = 7.}$

Si $x = -1$, sustituimos en la igualdad

$$5x^2 - 10x - 4x^3 + 5 = A(x-1)\left(x^2+1\right) + B\left(x^2+1\right) + (Cx+D)(x-1)^2$$

y se tiene

$$5(-1)^2 - 10(-1) - 4(-1)^3 + 5 = A((-1)-1)\left((-1)^2+1\right) + B\left((-1)^2+1\right) + (C(-1)+D)((-1)-1)^2$$

$$\Longrightarrow \qquad 5 + 10 + 4 + 5 = A(-2)(2) + B(2) + (-C+D)(-2)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad 24 = -4A + 2B - 4C + 4D,$$

como $B = -2$, se tiene que

$$24 = -4A + 2(-2) - 4C + 4D \qquad \Longrightarrow \qquad 28 = -4A - 4C + 4D,$$

de aquí $\boxed{-4A - 4C + 4D = 28.}$

Si $x = 2$, sustituimos en la igualdad

$$5x^2 - 10x - 4x^3 + 5 = A(x-1)\left(x^2+1\right) + B\left(x^2+1\right) + (Cx+D)(x-1)^2$$

y se tiene

$$5(2)^2 - 10(2) - 4(2)^3 + 5 = A((2)-1)\left((2)^2+1\right) + B\left((2)^2+1\right) + (C(2)+D)((2)-1)^2$$

$$\Longrightarrow \qquad 20 - 20 - 32 + 5 = A(1)(5) + B(5) + (2C+D)(1)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad -27 = 5A + 5B + 2C + D,$$

como $B = -2$, se tiene que

$$-27 = 5A + 5(-2) + 2C + D \qquad \Longrightarrow \qquad -17 = 5A + 2C + D,$$

de aquí $\boxed{5A + 2C + D = -17.}$

Resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -A + D = 7 \\ -4A - 4C + 4D = 28 \\ 5A + 2C + D = -17 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{A = -4} \boxed{C = 0} \boxed{D = 3}$$

Entonces

$$\frac{5x^2-10x-4x^3+5}{2x^2-2x-2x^3+x^4+1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{5x^2-10x-4x^3+5}{2x^2-2x-2x^3+x^4+1}=\frac{-4}{x-1}+\frac{-2}{(x-1)^2}+\frac{3}{x^2+1},$$

por lo tanto,

$$\int \frac{5x^2-10x-4x^3+5}{2x^2-2x-2x^3+x^4+1}\,dx=\int\left(\frac{-4}{x-1}+\frac{-2}{(x-1)^2}+\frac{3}{x^2+1}\right)dx=\int\frac{-4\,dx}{x-1}+\int\frac{-2\,dx}{(x-1)^2}+\int\frac{3\,dx}{x^2+1}.$$

La primera integral del lado derecho de la igualdad se resuelve haciendo el cambio de variable

$$u=x-1 \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du=dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int\frac{-4}{x-1}\,dx=-4\int\frac{du}{u}=-4\ln|u|+C_1=-4\ln|x-1|+C_1.$$

La segunda integral del lado derecho de la igualdad se resuelve haciendo el mismo cambio de variable que se utilizó para resolver la primera integral

$$u=x-1 \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du=dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int\frac{-2}{(x-1)^2}\,dx=-2\int\frac{du}{u^2}=2\,\frac{1}{u}+C_2=\frac{2}{x-1}+C_2.$$

La tercera integral del lado derecho de la igualdad es de tabla

$$\int\frac{3}{x^2+1}\,dx=3\arctan x+C_3.$$

Así,

$$\int \frac{5x^2-10x-4x^3+5}{2x^2-2x-2x^3+x^4+1}\,dx=\int\frac{-4\,dx}{x-1}+\int\frac{-2\,dx}{(x-1)^2}+\int\frac{3\,dx}{x^2+1}=-4\ln|x-1|+\frac{2}{x-1}+3\arctan x+C.$$

Finalmente,

$$\int \frac{5x^2-10x-4x^3+5}{2x^2-2x-2x^3+x^4+1}\,dx=3\arctan x-4\ln|x-1|+\frac{2}{x-1}+C.$$

★

Ejemplo 281 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{2x^2-6x+7}{(x-1)^2(x+2)}\,dx.$

Solución : Observemos que el grado del polinomio del numerador, 2, es menor que el grado del polinomio del denominador, 3, por lo tanto, no se dividen los polinomios. Además, el denominador ya está factorizado.

Escribimos las fracciones simples correspondientes

$$\frac{2x^2-6x+7}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2}.$$

Buscamos los valores de las constantes A, B y C, para los cuales la igualdad se satisfaga, para ello aplicamos el método de los coeficientes indeterminados

$$\frac{2x^2-6x+7}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{2x^2-6x+7}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)},$$

de aquí,

$$2x^2-6x+7 = A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2.$$

Para obtener los valores de las constantes le damos valores arbitrarios a x.

Si $x=1$, sustituimos en la igualdad $2x^2-6x+7 = A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2$ y se tiene

$$2(1)^2-6(1)+7 = A((1)-1)((1)+2)+B((1)+2)+C((1)-1)^2$$

$$\Longrightarrow \quad 2-6+7 = A(0)(3)+B(3)+C(0)^2 \quad \Longrightarrow \quad 3=3B,$$

de aquí $\boxed{B=1.}$

Si $x=-2$, sustituimos en la igualdad $2x^2-6x+7 = A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2$ y se tiene

$$2(-2)^2-6(-2)+7 = A((-2)-1)((-2)+2)+B((-2)+2)+C((-2)-1)^2$$

$$\Longrightarrow \quad 8+12+7 = A(-3)(0)+B(0)+C(-3)^2 \quad \Longrightarrow \quad 27=9C,$$

de aquí $\boxed{C=3.}$

Si $x=0$, sustituimos en la igualdad $2x^2-6x+7 = A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2$ y se tiene

$$2(0)^2-6(0)+7 = A((0)-1)((0)+2)+B((0)+2)+C((0)-1)^2$$

$$\Longrightarrow \quad 0-0+7 = A(-1)(2)+B(2)+C(-1)^2 \quad \Longrightarrow \quad 7=-2A+2B+C,$$

como $B=1$ y $C=3$, se tiene que

$$7=-2A+2(1)+(3) \qquad \Longrightarrow \qquad 7=-2A+2+3,$$

de aquí $\boxed{A=-1.}$

Entonces

$$\frac{2x^2-6x+7}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+2} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{2x^2-6x+7}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{-1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x+2},$$

por lo tanto,

$$\int \frac{2x^2-6x+7}{(x-1)^2(x+2)}\,dx=\int\left(\frac{-1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x+2}\right)dx=\int\frac{-\,dx}{x-1}+\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\int\frac{3\,dx}{x+2}.$$

La primera integral del lado derecho de la igualdad se resuelve haciendo el cambio de variable

$$u=x-1 \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du=dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int\frac{-\,dx}{x-1}=-\int\frac{du}{u}=-\ln|u|+C_1=-\ln|x-1|+C_1.$$

La segunda integral del lado derecho de la igualdad se resuelve haciendo el mismo cambio de variable que se utilizó para resolver la primera integral

$$u=x-1 \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du=dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int\frac{1}{(x-1)^2}\,dx=\int\frac{du}{u^2}=-\frac{1}{u}+C_2=-\frac{1}{x-1}+C_2.$$

La tercera y última integral del lado derecho de la igualdad la resolvemos haciendo el cambio de variable

$$u=x+2 \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du=dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int\frac{3}{x+2}\,dx=3\int\frac{du}{u}=3\ln|u|+C_3=3\ln|x+2|+C_3.$$

Así,

$$\int \frac{2x^2-6x+7}{(x-1)^2(x+2)}\,dx=\int\frac{-\,dx}{x-1}+\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\int\frac{3\,dx}{x+2}=-\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+3\ln|x+2|+C.$$

Finalmente

$$\int \frac{2x^2-6x+7}{(x-1)^2(x+2)}\,dx=-\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+3\ln|x+2|+C.$$

★

Ejemplo 282 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{x^2+8x+14}{(2x+4)\left(x^2+2x+2\right)}\,dx.$

Solución : Observemos que el grado del polinomio del numerador, 2, es menor que el grado del polinomio del denominador, 3, por lo tanto, no se dividen los polinomios. Además, el denominador ya está factorizado, puesto que, el polinomio $p(x)=x^2+2x+2$ no es factorizable en los números reales.

Escribimos las fracciones simples correspondientes

$$\frac{x^2+8x+14}{(2x+4)\left(x^2+2x+2\right)}=\frac{A}{2x+4}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+2}.$$

Buscamos los valores de las constantes A, B y C, para los cuales la igualdad se satisfaga, para ello aplicamos el método de los coeficientes indeterminados

$$\frac{x^2+8x+14}{(2x+4)\left(x^2+2x+2\right)}=\frac{A}{2x+4}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+2}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{x^2+8x+14}{(2x+4)\left(x^2+2x+2\right)}=\frac{A\left(x^2+2x+2\right)+(Bx+C)(2x+4)}{(2x+4)\left(x^2+2x+2\right)},$$

de aquí,

$$x^2+8x+14=A\left(x^2+2x+2\right)+(Bx+C)(2x+4).$$

Para obtener los valores de las constantes le damos valores arbitrarios a x.

Si $x=-2$, sustituimos en la igualdad $x^2+8x+14=A\left(x^2+2x+2\right)+(Bx+C)(2x+4)$ y se tiene

$$(-2)^2+8(-2)+14=A\left((-2)^2+2(-2)+2\right)+(B(-2)+C)(2(-2)+4)$$

$$\Longrightarrow \quad 4-16+14=A(4-4+2)+(-2B+C)(0) \quad \Longrightarrow \quad 2=2A,$$

de aquí $\boxed{A=1.}$

Si $x=0$, sustituimos en la igualdad $x^2+8x+14=A\left(x^2+2x+2\right)+(Bx+C)(2x+4)$ y se tiene

$$(0)^2+8(0)+14=A\left((0)^2+2(0)+2\right)+(B(0)+C)(2(0)+4)$$

$$\Longrightarrow \quad 0+0+14=A(0+0+2)+(0+C)(0+4) \quad \Longrightarrow \quad 14=2A+4C,$$

como $A=1$, se tiene que

$$14=2(1)+4C \quad \Longrightarrow \quad 14=2+4C,$$

de aquí $\boxed{C=3.}$

Si $x=1$, sustituimos en la igualdad $x^2+8x+14=A\left(x^2+2x+2\right)+(Bx+C)(2x+4)$ y se tiene

$$(1)^2+8(1)+14=A\left((1)^2+2(1)+2\right)+(B(1)+C)(2(1)+4)$$

$$\Longrightarrow \quad 1+8+14=A(1+2+2)+(B+C)(6) \quad \Longrightarrow \quad 23=5A+6B+6C,$$

como $A=1$ y $C=3$, se tiene que

$$23=5(1)+6B+6(3) \quad \Longrightarrow \quad 23=5+6B+18,$$

de aquí $\boxed{B = 0.}$

Entonces

$$\frac{x^2+8x+14}{(2x+4)(x^2+2x+2)} = \frac{A}{2x+4} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{x^2+8x+14}{(2x+4)(x^2+2x+2)} = \frac{1}{2x+4} + \frac{3}{x^2+2x+2},$$

por lo tanto,

$$\int \frac{x^2+8x+14}{(2x+4)(x^2+2x+2)}\, dx = \int \left(\frac{1}{2x+4} + \frac{3}{x^2+2x+2}\right) dx = \int \frac{1}{2x+4}\, dx + \int \frac{3}{x^2+2x+2}\, dx$$

$$= \int \frac{1}{2(x+2)}\, dx + \int \frac{3\, dx}{x^2+2x+2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+2} + 3\int \frac{dx}{x^2+2x+2}.$$

La primera integral del lado derecho de la igualdad se resuelve haciendo el cambio de variable

$$u = x+2 \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{dx}{x+2} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C_1 = \ln|x+2| + C_1.$$

Para la segunda integral del lado derecho de la igualdad completamos cuadrado

$$x^2+2x+2 = (x+1)^2 + 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+1},$$

se propone el cambio de variable

$$u = x+1 \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int \frac{du}{u^2+1} = \arctan u + C_2 = \arctan(x+1) + C_2.$$

Así,

$$\int \frac{x^2+8x+14}{(2x+4)(x^2+2x+2)}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+2} + 3\int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \frac{1}{2}\ln|x+2| + 3\arctan(x+1) + C.$$

Luego,

$$\int \frac{x^2+8x+14}{(2x+4)(x^2+2x+2)}\, dx = \frac{1}{2}\ln|x+2| + 3\arctan(x+1) + C.$$

★

Ejemplo 283 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{\left(\sec^2 x+1\right)\sec^2 x}{1+\tan^3 x}\,dx.$

Solución : Como $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$, tenemos que

$$\int \frac{\left(\sec^2 x+1\right)\sec^2 x}{1+\tan^3 x}\,dx = \int \frac{\left(\left(\tan^2 x+1\right)+1\right)\sec^2 x}{1+\tan^3 x}\,dx = \int \frac{\left(\tan^2 x+2\right)\sec^2 x}{1+\tan^3 x}\,dx,$$

se propone el cambio de variable

$$u=\tan x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = \sec^2 x\; dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{\left(\sec^2 x+1\right)\sec^2 x}{1+\tan^3 x}\,dx = \int \frac{\left(\tan^2 x+2\right)\sec^2 x}{1+\tan^3 x}\,dx = \int \frac{u^2+2}{1+u^3}\,du.$$

Aplicamos el método de la descomposición en fracciones simples para obtener la familia de primitivas de la función. Observemos que el grado del polinomio del numerador, 2, es menor que el grado del polinomio del denominador, 3, por lo tanto, no se dividen los polinomios. Factorizamos el denominador

$$u^3+1=(u+1)\left(u^2-u+1\right).$$

Escribimos las fracciones simples correspondientes

$$\frac{u^2+2}{(u+1)\left(u^2-u+1\right)} = \frac{A}{u+1}+\frac{Bu+C}{u^2+u+1}.$$

Buscamos los valores de las constantes A, B y C, para los cuales la igualdad se satisfaga, para ello aplicamos el método de los coeficientes indeterminados

$$\frac{u^2+2}{(u+1)\left(u^2-u+1\right)} = \frac{A}{u+1}+\frac{Bu+C}{u^2+u+1} \quad\Longrightarrow\quad \frac{u^2+2}{(u+1)\left(u^2-u+1\right)} = \frac{A\left(u^2-u+1\right)+(Bu+C)(u+1)}{(u+1)\left(u^2-u+1\right)},$$

de aquí,

$$u^2+2=A\left(u^2-u+1\right)+(Bu+C)(u+1).$$

Para obtener los valores de las constantes le damos valores arbitrarios a u.

Si $u=-1$, sustituimos en la igualdad $u^2+2=A\left(u^2-u+1\right)+(Bu+C)(u+1)$ y se tiene

$$(-1)^2+2=A\left((-1)^2-(-1)+1\right)+(B(-1)+C)((-1)+1)$$

$$\Longrightarrow \quad 1+2=A(1+1+1)+(-B+C)(0) \quad\Longrightarrow\quad 3=3A,$$

de aquí $\boxed{A=1.}$

Si $u=0$, sustituimos en la igualdad $u^2+2=A\left(u^2-u+1\right)+(Bu+C)(u+1)$ y se tiene

$$(0)^2+2=A\left((0)^2-(0)+1\right)+(B(0)+C)((0)+1)$$

$$\Longrightarrow \quad 0+2=A(0-0+1)+(0+C)(0+1) \quad\Longrightarrow\quad 2=A+C,$$

como $A=1$, se tiene que
$$2=(1)+C \qquad \Longrightarrow \qquad 2=1+C,$$
de aquí $\boxed{C=1.}$

Si $u=1$, sustituimos en la igualdad $u^2+2=A\left(u^2-u+1\right)+(Bu+C)(u+1)$ y se tiene
$$(1)^2+2=A\left((1)^2-(1)+1\right)+(B(1)+C)((1)+1)$$
$$\Longrightarrow \qquad 1+2=A(1-1+1)+(B+C)(1+1) \qquad \Longrightarrow \qquad 3=A+2B+2C,$$
como $A=1$ y $C=1$, se tiene que
$$3=(1)+2B+2(1) \qquad \Longrightarrow \qquad 3=1+2B+2 \qquad \Longrightarrow \qquad 0=2B,$$
de aquí $\boxed{B=0.}$

Entonces
$$\frac{u^2+2}{(u+1)(u^2-u+1)}=\frac{A}{u+1}+\frac{Bu+C}{u^2+u+1} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{u^2+2}{u^3+1}=\frac{1}{u+1}+\frac{1}{u^2-u+1},$$
por lo tanto,
$$\int \frac{u^2+2}{u^3+1}\,du=\int\left(\frac{1}{u+1}+\frac{1}{u^2-u+1}\right)du=\int\frac{du}{u+1}+\int\frac{du}{u^2-u+1}.$$
La primera integral del lado derecho de la igualdad se resuelve haciendo el cambio de variable
$$z=u+1 \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad dz=du,$$
con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda
$$\int\frac{du}{u+1}=\int\frac{dz}{z}=\ln|z|+C_1=\ln|u+1|+C_1.$$
Para la segunda integral del lado derecho de la igualdad completamos cuadrado
$$u^2-u+1=\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} \qquad \Longrightarrow \qquad \int\frac{du}{u^2-u+1}=\int\frac{du}{(u-1/2)^2+3/4},$$
se propone el cambio trigonométrico
$$u-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan t \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du=\frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2 t\;dt,$$
con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda
$$\int\frac{du}{u^2-u+1}=\int\frac{du}{(u-1/2)^2+3/4}=\int\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2 t\;dt}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tan t\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\int\frac{\sec^2 t\;dt}{\frac{3}{4}\tan^2 t+\frac{3}{4}}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\int\frac{\sec^2 t\;dt}{\frac{3}{4}\left(\tan^2 t+1\right)}=\frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\int\frac{\sec^2 t}{\sec^2 t}\,dt=\frac{2\sqrt{3}}{3}\int dt=\frac{2\sqrt{3}}{3}\,t+C_2,$$

como
$$x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan t \qquad \Longrightarrow \qquad \tan t=\frac{2u-1}{\sqrt{3}} \qquad \Longrightarrow \qquad t=\arctan\left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right),$$
de aquí,
$$\int \frac{du}{u^2-u+1}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right)+C_2.$$

Así,
$$\int \frac{u^2+2}{u^3+1}\,du=\int \frac{du}{u+1}+\int \frac{du}{u^2-u+1}\,du=\ln|u+1|+\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right)+C,$$
puesto que, $u=\tan x$, entonces
$$\int \frac{\left(\sec^2 x+1\right)\sec^2 x}{1+\tan^3 x}\,dx=\ln|\tan x+1|+\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2\tan x-1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

★

Ejemplo 284 : *Integre* $\displaystyle\int \frac{2e^x-1}{e^x-2e^{-x}+1}\,dx.$

Solución : Tenemos que, el integrando lo podemos escribir como
$$\frac{2e^x-1}{e^x-2e^{-x}+1}=\frac{2e^x-1}{e^x-\dfrac{2}{e^x}+1}=\frac{2e^x-1}{\dfrac{e^x\;e^x-2+e^x}{e^x}}=\frac{\left(2e^x-1\right)e^x}{\left(e^x\right)^2+e^x-2},$$
así,
$$\int \frac{2e^x-1}{e^x-2e^{-x}+1}\,dx=\int \frac{\left(2e^x-1\right)e^x}{\left(e^x\right)^2+e^x-2}\,dx,$$
se propone el cambio de variable
$$u-e^x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du=e^x\,dx,$$
con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda
$$\int \frac{2e^x-1}{e^x-2e^{-x}+1}\,dx=\int \frac{\left(2e^x-1\right)e^x}{\left(e^x\right)^2+e^x-2}\,dx=\int \frac{(2u-1)\,du}{u^2+u-2}.$$

Aplicamos el método de la descomposición en fracciones simples para obtener la familia de primitivas de la función. Observemos que el grado del polinomio del numerador, 1, es menor que el grado del polinomio del denominador, 2, por lo tanto, no se dividen los polinomios. Factorizamos el denominador
$$u^2+u-2=(u-1)(u+2).$$

Escribimos las fracciones simples correspondientes
$$\frac{2u-1}{(u-1)(u+2)}=\frac{A}{u-1}+\frac{B}{u+2}.$$
Buscamos los valores de las constantes A, y B, para los cuales la igualdad se satisfaga, para ello aplicamos el método de los coeficientes indeterminados
$$\frac{2u-1}{(u-1)(u+2)}=\frac{A}{u-1}+\frac{B}{u+2} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{2u-1}{(u-1)(u+2)}=\frac{A(u+2)+B(u-1)}{(u-1)(u+2)},$$

de aquí,

$$2u - 1 = A\,(u + 2) + B\,(u - 1)\,.$$

Para obtener los valores de las constantes le damos valores arbitrarios a u.

Si $u = 1$, sustituimos en la igualdad $2u - 1 = A\,(u + 2) + B\,(u - 1)$ y se tiene

$$2\,(1) - 1 = A\,((1) + 2) + B\,((1) - 1) \quad \Longrightarrow \quad 2 - 1 = A\,(1 + 2) + B\,(0) \quad \Longrightarrow \quad 1 = 3A,$$

de aquí $\boxed{A = \dfrac{1}{3}.}$

Si $u = -2$, sustituimos en la igualdad $2u - 1 = A\,(u + 2) + B\,(u - 1)$ y se tiene

$$2\,(-2) - 1 = A\,((-2) + 2) + B\,((-2) - 1) \quad \Longrightarrow \quad -4 - 1 = A\,(0) + B\,(-2 - 1) \quad \Longrightarrow \quad -5 = -3B,$$

de aquí $\boxed{B = \dfrac{5}{3}.}$

Entonces

$$\frac{2u - 1}{(u - 1)\,(u + 2)} = \frac{A}{u - 1} + \frac{B}{u + 2} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{2u - 1}{(u - 1)\,(u + 2)} = \frac{1/3}{u - 1} + \frac{5/3}{u + 2},$$

por lo tanto,

$$\int \frac{2u - 1}{(u - 1)\,(u + 2)}\; du = \int \left(\frac{1/3}{u - 1} + \frac{5/3}{u + 2} \right) du = \int \frac{1/3\; du}{u - 1} + \int \frac{5/3\; du}{u + 2} = \frac{1}{3} \int \frac{du}{u - 1} + \frac{5}{3} \int \frac{du}{u + 2}.$$

La primera integral del lado derecho de la igualdad se resuelve haciendo el cambio de variable

$$z = u - 1 \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad dz = du,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{du}{u - 1} = \int \frac{dz}{z} = \ln |z| + C_1 = \ln |u - 1| + C_1.$$

La segunda integral del lado derecho de la igualdad se resuelve haciendo el cambio de variable

$$p = u + 2 \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad dp = du,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{du}{u + 2} = \int \frac{dp}{p} = \ln |p| + C_2 = \ln |u + 2| + C_2.$$

Así,

$$\int \frac{(2u - 1)\, du}{u^2 + u - 2} = \frac{1}{3} \int \frac{du}{u - 1} + \frac{5}{3} \int \frac{du}{u + 2} = \frac{1}{3} \ln |u - 1| + \frac{5}{3} \ln |u + 2| + C,$$

puesto que, $u = e^x$, entonces

$$\int \frac{2e^x - 1}{e^x - 2e^{-x} + 1}\; dx = \frac{1}{3} \ln |e^x - 1| + \frac{5}{3} \ln (e^x + 2) + C.$$

★

Ejemplo 285 : *Integre* $\displaystyle\int \frac{2+\sqrt{e^x+1}}{e^x+2+e^{-x}\left(1-\sqrt{e^x+1}\right)}\ dx.$

Solución : Tenemos que, el integrando lo podemos escribir como

$$\frac{2+\sqrt{e^x+1}}{e^x+2+e^{-x}\left(1-\sqrt{e^x+1}\right)}=\frac{2+\sqrt{e^x+1}}{e^x+2+\dfrac{1-\sqrt{e^x+1}}{e^x}}=\frac{2+\sqrt{e^x+1}}{\dfrac{(e^x)^2+2e^x+1-\sqrt{e^x+1}}{e^x}}$$

$$=\frac{\left(2+\sqrt{e^x+1}\right)e^x}{(e^x)^2+2e^x+1-\sqrt{e^x+1}}=\frac{\left(2+\sqrt{e^x+1}\right)e^x}{(e^x+1)^2-\sqrt{e^x+1}},$$

por lo tanto,

$$\int \frac{2+\sqrt{e^x+1}}{e^x+2+e^{-x}\left(1-\sqrt{e^x+1}\right)}\ dx=\int \frac{\left(2+\sqrt{e^x+1}\right)e^x}{(e^x+1)^2-\sqrt{e^x+1}}\ dx.$$

Se propone el cambio de variable

$$u^2=e^x+1 \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad 2u\ du=e^x\ dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{2+\sqrt{e^x+1}}{e^x+2+e^{-x}\left(1-\sqrt{e^x+1}\right)}\ dx=\int \frac{\left(2+\sqrt{e^x+1}\right)e^x}{(e^x+1)^2-\sqrt{e^x+1}}\ dx=\int \frac{\left(2+\sqrt{u^2}\right)\ 2u\ du}{(u^2)^2-\sqrt{u^2}}$$

$$=\int \frac{2u\,(2+u)}{u^4-u}\ du=\int \frac{2u\,(2+u)}{u\,(u^3-1)}\ du=2\int \frac{2+u}{u^3-1}\ du.$$

Aplicamos el método de la descomposición en fracciones simples para obtener la familia de primitivas de la función. Observemos que el grado del polinomio del numerador, 1, es menor que el grado del polinomio del denominador, 3, por lo tanto, no se dividen los polinomios. Factorizamos el denominador

$$u^3-1=(u-1)\left(u^2+u+1\right).$$

Escribimos las fracciones simples correspondientes

$$\frac{2+u}{(u-1)\,(u^2+u+1)}=\frac{A}{u-1}+\frac{Bu+C}{u^2+u+1}.$$

Buscamos los valores de las constantes A, B y C, para los cuales la igualdad se satisfaga, para ello aplicamos el método de los coeficientes indeterminados

$$\frac{2+u}{(u-1)\,(u^2+u+1)}=\frac{A}{u-1}+\frac{Bu+C}{u^2+u+1} \quad\Longrightarrow\quad \frac{2+u}{(u-1)\,(u^2+u+1)}=\frac{A\left(u^2+u+1\right)+(Bu+C)\,(u-1)}{(u-1)\,(u^2+u+1)},$$

de aquí,

$$u+2=A\left(u^2+u+1\right)+(Bu+C)\,(u-1).$$

Para obtener los valores de las constantes le damos valores arbitrarios a u.

Si $u=1$, sustituimos en la igualdad $u+2=A\left(u^2+u+1\right)+(Bu+C)\,(u-1)$ y se tiene

$$(1)+2=A\left((1)^2+(1)+1\right)+(B\,(1)+C)\,((1)-1)$$

$$\Longrightarrow \quad 1+2=A\,(1+1+1)+(B+C)\,(0) \quad\Longrightarrow\quad 3=3A,$$

de aquí $\boxed{A = 1.}$

Si $u = 0$, sustituimos en la igualdad $u + 2 = A\left(u^2 + u + 1\right) + (Bu + C)(u - 1)$ y se tiene

$$(0) + 2 = A\left((0)^2 + (0) + 1\right) + (B(0) + C)((0) - 1)$$

$$\Longrightarrow \quad 0 + 2 = A(0 + 0 + 1) + (0 + C)(-1) \quad \Longrightarrow \quad 2 = A - C,$$

como $A = 1$, se tiene que

$$2 = (1) - C \qquad \Longrightarrow \qquad 2 = 1 - C,$$

de aquí $\boxed{C = -1.}$

Si $u = -1$, sustituimos en la igualdad $u + 2 = A\left(u^2 + u + 1\right) + (Bu + C)(u - 1)$ y se tiene

$$(-1) + 2 = A\left((-1)^2 + (-1) + 1\right) + (B(-1) + C)((-1) - 1)$$

$$\Longrightarrow \quad -1 + 2 = A(1 - 1 + 1) + (-B + C)(-1 - 1) \quad \Longrightarrow \quad 1 = A + 2B - 2C,$$

como $A = 1$ y $C = -1$ se tiene que

$$1 = (1) + 2B - 2(-1) \qquad \Longrightarrow \qquad 1 = 1 + 2B + 2,$$

de aquí $\boxed{B = -1.}$

Entonces

$$\frac{2 + u}{(u - 1)\left(u^2 + u + 1\right)} = \frac{A}{u - 1} + \frac{Bu + C}{u^2 + u + 1} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{2 + u}{(u - 1)\left(u^2 + u + 1\right)} = \frac{1}{u - 1} + \frac{-u - 1}{u^2 + u + 1},$$

por lo tanto,

$$\int \frac{2 + u}{(u - 1)\left(u^2 + u + 1\right)}\, du = \int \left(\frac{1}{u - 1} + \frac{-u - 1}{u^2 + u + 1}\right) du = \int \frac{du}{u - 1} - \int \frac{u + 1}{u^2 + u + 1}\, du.$$

La primera integral del lado derecho de la igualdad se resuelve haciendo el cambio de variable

$$z = u - 1 \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad dz = du,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{du}{u - 1} = \int \frac{dz}{z} = \ln|z| + C_1 = \ln|u - 1| + C_1.$$

Para la segunda integral del lado derecho de la igualdad completamos cuadrado

$$u^2 + u + 1 = \left(u + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \qquad \Longrightarrow \qquad \int \frac{(u + 1)\, du}{u^2 + u + 1} = \int \frac{(u + 1)\, du}{(u + 1/2)^2 + 3/4},$$

se propone el cambio trigonométrico

$$u + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\tan t \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = \frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2 t\; dt,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{(u+1)\,du}{u^2+u+1} = \int \frac{(u+1)\,du}{(u+1/2)^2+3/4} = \int \frac{(u+1/2+1/2)\,du}{(u+1/2)^2+3/4} = \int \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tan t + \frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2 t\ dt}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tan t\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tan t + \frac{1}{2}\right)\sec^2 t\ dt}{\frac{3}{4}\tan^2 t + \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tan t + \frac{1}{2}\right)\sec^2 t\ dt}{\frac{3}{4}\left(\tan^2 t + 1\right)}$$

$$= \frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tan t + \frac{1}{2}\right)\sec^2 t}{\sec^2 t}\ dt = \frac{2\sqrt{3}}{3}\int \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tan t + \frac{1}{2}\right) dt$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\int \frac{\sqrt{3}}{2}\tan t\ dt + \int \frac{1}{2}\ dt\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\int \frac{\sqrt{3}}{2}\tan t\ dt + \frac{2\sqrt{3}}{3}\int \frac{1}{2}\ dt$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\int \tan t\ dt + \frac{2\sqrt{3}}{3}\,\frac{1}{2}\int\ dt = \int \tan t\ dt + \frac{\sqrt{3}}{3}\int dt,$$

donde,

$$\int\ dt = t + C_2,$$

mientras que,

$$\int \tan t\ dt = \int \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}\ dt,$$

se propone el cambio de variable

$$p = \cos t \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad dp = -\operatorname{sen} t\ dt \qquad \Longrightarrow \qquad -dp = \operatorname{sen} t\ dt,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}\ dt = \int \frac{-dp}{p} = -\ln|p| + C_3 = -\ln|\cos t| + C_3 = \ln\left|(\cos t)^{-1}\right| + C_3 = \ln\left|\frac{1}{\cos t}\right| + C_3 = \ln|\sec t| + C_3,$$

luego,

$$\int \tan t\ dt = \ln|\sec t| + C_3$$

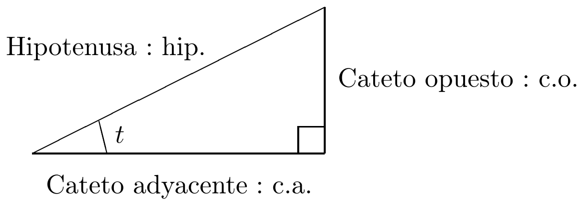
de aquí,

$$\int \frac{(u+1)\,du}{u^2+u+1} = \int \tan t\ dt + \frac{\sqrt{3}}{3}\int dt = \ln|\sec t| + \frac{\sqrt{3}}{3}\ t + C_4,$$

ahora, se expresa la familia de primitiva $F(t) = \ln|\sec t| + \frac{\sqrt{3}}{3}\ t + C_4$, en términos de la variable original de integración u, puesto que

$$u + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\tan t \qquad \Longrightarrow \qquad \tan t = \frac{2u+1}{\sqrt{3}} \qquad \Longrightarrow \qquad t = \arctan\left(\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right).$$

Para calcular $\sec t$ en función de u, se trabaja con el triángulo trigonométrico rectangular,



$$\operatorname{sen} t = \frac{\text{c.o.}}{\text{hip.}} \qquad \cos t = \frac{\text{c.a.}}{\text{hip.}} \qquad \tan t = \frac{\text{c.o.}}{\text{c.a.}}$$

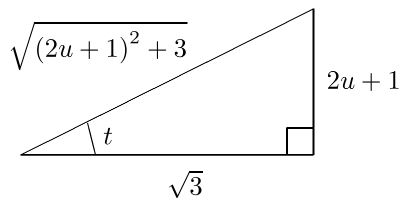
$$\csc t = \frac{\text{hip.}}{\text{c.o.}} \qquad \sec t = \frac{\text{hip.}}{\text{c.a.}} \qquad \cot t = \frac{\text{c.a.}}{\text{c.o.}}$$

por lo tanto,

$$u - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\tan t \qquad \Longrightarrow \qquad \tan t = \frac{2u+1}{\sqrt{3}} = \frac{\text{c.o.}}{\text{c.a.}}$$

Por Pitágoras

$$(\text{hip.})^2 = (\text{c.o.})^2 + (\text{c.a.})^2 \qquad \text{hip.} = \sqrt{(2u+1)^2+3}$$



entonces,

$$\sec t = \frac{\text{hip.}}{\text{c.a.}} = \frac{\sqrt{(2u+1)^2+3}}{\sqrt{3}}.$$

Luego,

$$\int \frac{(u+1)\,du}{u^2+u+1} = \ln\left|\frac{\sqrt{(2u+1)^2+3}}{\sqrt{3}}\right| + \frac{\sqrt{3}}{3}\ \arctan\left(\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right) + C_4$$

$$= \ln\left|\sqrt{(2u+1)^2+3}\right| + \frac{\sqrt{3}}{3}\ \arctan\left(\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right) + C_5$$

$$= \ln\left|\sqrt{4u^2+4u+4}\right| + \frac{\sqrt{3}}{3}\ \arctan\left(\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right) + C_5$$

$$= \ln\left|\sqrt{4\left(u^2+u+1\right)}\right| + \frac{\sqrt{3}}{3}\ \arctan\left(\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right) + C_5$$

$$= \ln\left|2\left(u^2+u+1\right)^{1/2}\right| + \frac{\sqrt{3}}{3}\ \arctan\left(\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right) + C_5$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(u^2+u+1\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\ \arctan\left(\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right) + C_6.$$

Así,

$$\int \frac{2+u}{u^3-1}\,du = \int \frac{du}{u-1} - \int \frac{(u+1)\,du}{u^2+u+1} = \ln|u-1| - \left(\frac{1}{2}\ln\left(u^2+u+1\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\ \arctan\left(\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right)\right) + C_7$$

$$= \ln|u-1| - \frac{1}{2}\ln\left(u^2+u+1\right) - \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right) + C_7,$$

como $u = e^x + 1$, entonces

$$\int \frac{2+\sqrt{e^x+1}}{e^x+2+e^{-x}\left(1-\sqrt{e^x+1}\right)}\,dx = 2\int \frac{2+u}{u^3-1}\,du$$

$$= 2\left(\ln|u-1| - \frac{1}{2}\ln\left(u^2+u+1\right) - \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right)\right) + C$$

$$= 2\left(\ln|e^x+1-1| - \frac{1}{2}\ln\left((e^x+1)^2+(e^x+1)+1\right) - \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2(e^x+1)+1}{\sqrt{3}}\right)\right) + C$$

$$= 2x - \ln\left((e^x+1)^2+e^x+2\right) - \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2e^x+3}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

Finalmente

$$\int \frac{2+\sqrt{e^x+1}}{e^x+2+e^{-x}\left(1-\sqrt{e^x+1}\right)}\,dx = 2x - \ln\left((e^x+1)^2+e^x+2\right) - \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2e^x+3}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

★

Ejemplo 286 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{4^x+2^x}{8^x-4^{x+1}}\,dx.$

Solución : Escribimos la integral como

$$\int \frac{4^x+2^x}{8^x-4^{x+1}}\,dx = \int \frac{(2^x)^2+2^x}{(2^x)^3-4\cdot(2^x)^2}\,dx = \int \frac{(2^x+1)\,2^x}{(2^x)^3-4\cdot(2^x)^2}\,dx.$$

Se propone el cambio de variable

$$u = 2^x \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad du = 2^x\ln 2\;dx \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{du}{\ln 2} = 2^x\;dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{4^x+2^x}{8^x-4^{x+1}}\,dx = \int \frac{u+1}{u^3-4u^2}\,\frac{du}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{u+1}{u^3-4u^2}\,du,$$

Aplicamos el método de la descomposición en fracciones simples para obtener la familia de primitivas de la función. Observemos que el grado del polinomio del numerador, 1, es menor que el grado del polinomio del denominador, 3, por lo tanto, no se dividen los polinomios. Factorizamos el denominador

$$u^3-4u^2 = u^2\,(u-4)\,.$$

Escribimos las fracciones simples correspondientes

$$\frac{u+1}{u^2\,(u-4)} = \frac{Au+B}{u^2} + \frac{C}{u-4}.$$

Buscamos los valores de las constantes A, B y C, para los cuales la igualdad se satisfaga, para ello aplicamos el método de los coeficientes indeterminados

$$\frac{u+1}{u^2\,(u-4)} = \frac{Au+B}{u^2} + \frac{C}{u-4} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{u+1}{u^2\,(u-4)} = \frac{(Au+B)\,(u-4)+Cu^2}{u^2\,(u-4)},$$

de aquí,

$$u+1=(Au+B)(u-4)+Cu^2.$$

Para obtener los valores de las constantes le damos valores arbitrarios a u.

Si $u=0$, sustituimos en la igualdad $u+1=(Au+B)(u-4)+Cu^2$ y se tiene

$$(0)+1=(A(0)+B)((0)-4)+C(0)^2 \quad\Longrightarrow\quad 0+1=(0+B)(0-4)+C(0)^2 \quad\Longrightarrow\quad 1=-4B,$$

de aquí $\boxed{B=-\dfrac{1}{4}.}$

Si $u=4$, sustituimos en la igualdad $u+1=(Au+B)(u-4)+Cu^2$ y se tiene

$$(4)+1=(A(4)+B)((4)-4)+C(4)^2 \quad\Longrightarrow\quad 4+1=(4A+B)(0)+16C \quad\Longrightarrow\quad 5=16C,$$

de aquí $\boxed{C=\dfrac{5}{16}.}$

Si $u=1$, sustituimos en la igualdad $u+1=(Au+B)(u-4)+Cu^2$ y se tiene

$$(1)+1=(A(1)+B)((1)-4)+C(1)^2 \quad\Longrightarrow\quad 1+1=(A+B)(1-4)+C \quad\Longrightarrow\quad 2=-3A-3B+C,$$

como $B=-\dfrac{1}{4}$ y $C=\dfrac{5}{16}$, se tiene que

$$2=-3A-3\left(-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{5}{16}\right) \quad\Longrightarrow\quad 2=-3A+\frac{3}{4}+\frac{5}{16} \quad\Longrightarrow\quad 2=-3A+\frac{17}{16},$$

de aquí $\boxed{A=-\dfrac{5}{16}.}$

Entonces

$$\frac{u+1}{u^2(u-4)}=\frac{Au+B}{u^2}+\frac{C}{u-4} \qquad\Longrightarrow\qquad \frac{u+1}{u^2(u-4)}=\frac{-\frac{5}{16}u-\frac{1}{4}}{u^2}+\frac{\frac{5}{16}}{u-4},$$

por lo tanto,

$$\int\frac{u+1}{u^2(u-4)}\,du=\int\left(\frac{-\frac{5}{16}u-\frac{1}{4}}{u^2}+\frac{\frac{5}{16}}{u-4}\right)du=\int\left(\frac{-\frac{5}{16}u}{u^2}-\frac{\frac{1}{4}}{u^2}+\frac{\frac{5}{16}}{u-4}\right)du$$

$$=\int\left(-\frac{5}{16}\,\frac{u}{u^2}-\frac{1}{4}\,\frac{1}{u^2}+\frac{5}{16}\,\frac{1}{u-4}\right)du=-\frac{5}{16}\int\frac{du}{u}-\frac{1}{4}\int\frac{du}{u^2}+\frac{5}{16}\int\frac{du}{u-4},$$

es decir,

$$\int\frac{u+1}{u^2(u-4)}\,du=-\frac{5}{16}\int\frac{du}{u}-\frac{1}{4}\int\frac{du}{u^2}+\frac{5}{16}\int\frac{du}{u-4},$$

donde

$$\int\frac{du}{u}=\ln|u|+C_1,$$

mientras que,

$$\int\frac{du}{u^2}=\int u^{-2}\,du=-\frac{1}{u}+C_2,$$

y por último, la tercera integral del lado derecho de la igualdad se resuelve haciendo el cambio de variable

$$z = u - 4 \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Cálculo del}} \qquad dz = du,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Entonces, la integral queda

$$\int \frac{du}{u-4} = \int \frac{dz}{z} = \ln|z| + C_3 = \ln|u-4| + C_3$$

Así,

$$\int \frac{u+1}{u^3-4u^2}\,du = -\frac{5}{16}\int \frac{du}{u} - \frac{1}{4}\int \frac{du}{u^2} + \frac{5}{16}\int \frac{du}{u-4} = \frac{1}{4u} - \frac{5}{16}\ln|u| + \frac{5}{16}\ln|u-4| + C$$

como $u = 2^x$, se tiene

$$\int \frac{4^x+2^x}{8^x-4^{x+1}}\,dx = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{u+1}{u^3-4u^2}\,du = \frac{1}{\ln 2}\left(\frac{1}{4\cdot 2^x} - \frac{5}{16}\ln|2^x| + \frac{5}{16}\ln|2^x-4|\right) + C$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\left(\frac{2^{-x}}{4} - \frac{5x}{16}\ln 2 + \frac{5}{16}\ln|2^x-4|\right) + C.$$

Luego,

$$\int \frac{4^x+2^x}{8^x-4^{x+1}}\,dx = \frac{1}{\ln 2}\left(\frac{2^{-x}}{4} - \frac{5x}{16}\ln 2 + \frac{5}{16}\ln|2^x-4|\right) + C.$$

★

Ejercicios

1. Calcular las siguientes integrales utilizando descomposición en fracciones simples.

1. $\int \frac{x^2+1}{x^2-x}\,dx$ 2. $\int \frac{dx}{x^2-x-2}$ 3. $\int \frac{2\,dx}{x^2+2x}$ 4. $\int \frac{3t^2-6t+2}{2t^3-3t^2+t}\,dt$ 5. $\int \frac{5t+3}{t^2-9}\,dt$

6. $\int \frac{3x^3\,dx}{x^2+x-2}$ 7. $\int \frac{t^4+8t^2+8}{t^3-4t}\,dt$ 8. $\int \frac{2\,dx}{x^2-1}$ 9. $\int \frac{x^2\,dx}{(x+1)^3}$ 10. $\int \frac{dx}{x^2(x-1)^2}$

11. $\int \frac{\left(5x^2+6x+9\right)\,dx}{(x-3)^2(x+1)^2}$ 12. $\int \frac{x^3+x}{(x-3)^2}\,dx$ 13. $\int \frac{dt}{t^2(t+1)^2}$ 14. $\int \frac{x^3-4x}{(x^2-1)^2}\,dx$

15. $\int \frac{\left(x^3+1\right)\,dx}{(x^2-4x+5)^2}$ 16. $\int \frac{x^2+19x+10}{(x-3)^2(2x+1)^2}\,dx$ 17. $\int \frac{dx}{9x^4+x^2}$ 18. $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$

19. $\int \frac{\left(x^4+1\right)\,dx}{x^4+x^2}$ 20. $\int \frac{x^2-2x-1}{(x^2+3)(x^2+1)}\,dx$ 21. $\int \frac{x^3\,dx}{(1+x^2)^2}$ 22. $\int \frac{x^2\,dx}{(x^3+4x)^2}$

23. $\int \frac{dx}{(x^4+x^2+1)^2}$ 24. $\int \frac{4x^2+3x+6}{(x^2+2)^2(x^2+3)^2}\,dx$ 25. $\int \frac{x^4\,dx}{x^4-1}$ 26. $\int \frac{x+1}{x^3-1}\,dx$

27. $\int \frac{x+4}{x(x^2+4)}\,dx$ 28. $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+x+1)^2}$ 29. $\int \frac{dx}{x^3+3x`2}$ 30. $\int \frac{(x-6)\,dx}{x^2-2x}$

31. $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{x\left(x^2+1\right)}\,dx$ 32. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}$ 33. $\displaystyle\int \frac{9\ dx}{8x^3+1}$ 34. $\displaystyle\int \frac{\left(t^2+2\right)\ dt}{t\left(t^2+1\right)}$

35. $\displaystyle\int \frac{\left(2x^3-x\right)\ dx}{x^4-x^2+1}$ 36. $\displaystyle\int \frac{\left(x^2-3\right)\ dx}{x^3+4x^2+5x+2}$ 37. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3-1}$ 38. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+x^2+x}$

39. $\displaystyle\int \frac{\left(5x^3+2\right)\ dx}{x^3-5x^2+4x}$ 40. $\displaystyle\int \frac{(20x-11)\ dx}{(3x+2)\left(x^2-4x+5\right)}$ 41. $\displaystyle\int \frac{(x+2)\ dx}{x^2\left(x^2-1\right)}$ 42. $\displaystyle\int \frac{dt}{\left(t^2+1\right)^3}$

43. $\displaystyle\int \frac{(x-11)\ dx}{x^2+3x-4}$ 44. $\displaystyle\int \frac{\left(x^3-8x^2-1\right)\ dx}{(x+3)(x-2)\left(x^2+1\right)}$ 45. $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^3+x}$ 46. $\displaystyle\int \frac{5x-2}{x^2-4}\,dx$

47. $\displaystyle\int \frac{x^2\ dx}{2x^3+9x^2+12x+4}$ 48. $\displaystyle\int \frac{dt}{(t+2)^2(t+1)}$ 49. $\displaystyle\int \frac{dx}{16x^4-1}$ 50. $\displaystyle\int \frac{18\ dx}{\left(4x^2+9\right)^2}$

51. $\displaystyle\int \frac{(17x-3)\ dx}{3x^2+x-2}$ 52. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1}$ 53. $\displaystyle\int \frac{x^2-4x-4}{x^3-2x^2+4x-8}\,dx$ 54. $\displaystyle\int \frac{4+5x^2}{x^3+4x}\,dx$

55. $\displaystyle\int \frac{\left(2x^2+41x-91\right)\ dx}{(x-1)(x+3)(x-4)}$ 56. $\displaystyle\int \frac{(t+3)\ dt}{4t^4+4t^3+t^2}$ 57. $\displaystyle\int \frac{e^x\ dx}{e^{4x}-1}$ 58. $\displaystyle\int \frac{e^{5x}\ dx}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$

59. $\displaystyle\int \frac{(4x-2)\ dx}{x^3-x^2-2x}$ 60. $\displaystyle\int \frac{2x^2-3x-36}{(2x-1)\left(x^2+9\right)}\,dx$ 61. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-4}$ 62. $\displaystyle\int \frac{\left(t^2+2\right)\ dt}{t\left(t^2-1\right)}$

63. $\displaystyle\int \frac{dt}{(t+a)(t+b)}$ 64. $\displaystyle\int \frac{2x^3+5x^2+16x}{x^5+8x^3+16x}\,dx$ 65. $\displaystyle\int \frac{x^6\ dx}{x^2-16}$ 66. $\displaystyle\int \frac{x^2\ dx}{x^2+x-6}$

67. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(3-\ln x)(1-\ln x)}$ 68. $\displaystyle\int \frac{5x^3-4x}{x^4-16}\,dx$ 69. $\displaystyle\int \frac{t^3\ dt}{t^3-8}$ 70. $\displaystyle\int \frac{t^3-1}{4t^3-t}\,dt$

71. $\displaystyle\int \frac{\cos x\ dx}{\operatorname{sen} x+\operatorname{sen}^3 x}$ 72. $\displaystyle\int \frac{x^2+3x+3}{x^3+x^2+x+1}\,dx$ 73. $\displaystyle\int \frac{t^2\ dt}{t^4-8t}$ 74. $\displaystyle\int \frac{x-3}{x^3+x^2}\,dx$

75. $\displaystyle\int \frac{(5x+7)\ dx}{x^2+4x+4}$ 76. $\displaystyle\int \frac{\left(3x^2+7x\right)\ dx}{x^3+6x^2+11x+6}$ 77. $\displaystyle\int \frac{30x^2+52x+17-24x^3}{9x^4-6x^3-11x^2+4x+4}\,dx$

78. $\displaystyle\int \frac{x^2-3x-7}{(2x+3)(x+1)}\,dx$ 79. $\displaystyle\int \frac{\left(x^4+1\right)\ dx}{x\left(x^2+1\right)^2}$ 80. $\displaystyle\int \frac{x^4+3x^3-5x^2-4x+17}{x^3+x^2-5x+3}\,dx$

81. $\displaystyle\int \frac{(3x-13)\ dx}{x^2+3x-10}$ 82. $\displaystyle\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}\,dx$ 83. $\displaystyle\int \frac{\left(2x^3+9x\right)\ dx}{\left(x^2+3\right)\left(x^2-2x+3\right)}$

84. $\displaystyle\int \frac{5x^2-11x+5}{x^3-4x^2+5x-2}\,dx$ 85. $\displaystyle\int \frac{x^2-8x+7}{\left(x^2-3x-10\right)^2}\,dx$ 86. $\displaystyle\int \frac{x^2+x+2}{x^2-1}\,dx$

87. $\displaystyle\int \frac{x^4-6x^3-12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8}\,dx$ 88. $\displaystyle\int \frac{2x-3}{\left(x^2-3x+2\right)^2}\,dx$ 89. $\displaystyle\int \frac{2x^2+x-8}{x^3+4x}\,dx$

90. $\displaystyle\int \frac{5x^2+3x-2}{x^3+2x^2}\,dx$ 91. $\displaystyle\int \frac{x^2+2x-1}{27x^3-1}\,dx$ 92. $\displaystyle\int \frac{6x^2+22x-23}{(2x-1)\left(x^2+x-6\right)}\,dx$

93. $\displaystyle\int \frac{2x^2-x+2}{x^5-2x^3+x}\,dx$ 94. $\displaystyle\int \frac{\left(\sec^2 x+1\right)\sec^2 x}{1+\tan^3 x}\,dx$ 95. $\displaystyle\int \frac{x^2-4x+3}{x(x+1)^2}\,dx$

96. $\displaystyle\int \frac{6x^2-2x-1}{4x^3-x}\,dx$ 97. $\displaystyle\int \frac{2x^2+3x+2}{x^3+4x^2+6x+4}\,dx$ 98. $\displaystyle\int \frac{x-2}{2x^2+7x+3}\,dx$

99. $\displaystyle\int \frac{3x+5}{\left(x^2+2x+2\right)^2}\,dx$ 100. $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(x^2-4x+3\right)\left(x^2+4x+5\right)}$ 101. $\displaystyle\int \frac{(2x+21)\ dx}{2x^2+9x-5}$

102. $\displaystyle\int \frac{x^2+19x+10}{2x^4+5x^3}\,dx$ 103. $\displaystyle\int \frac{3x^2-21x+32}{x^3-8x^2+16x}\,dx$ 104. $\displaystyle\int \frac{3x^2-x+1}{x^3-x^2}\,dx$

105. $\displaystyle\int \frac{2x^4-2x+1}{2x^5-x^4}\,dx$ 106. $\displaystyle\int \frac{2x^2+13x+18}{x^3+6x^2+9x}\,dx$ 107. $\displaystyle\int \frac{2t^2+t-4}{t^3-t^2-2t}\,dt$

108. $\displaystyle\int \frac{\left(x^2+x\right)\ dx}{x^3-x^2+x-1}$ 109. $\displaystyle\int \frac{5x^2-3x+18}{9x-x^3}\,dx$ 110. $\displaystyle\int \frac{\left(2+\sqrt{e^x+1}\right)\ dx}{e^x+2+e^{-x}\left(1-\sqrt{e^x+1}\right)}$

111. $\displaystyle\int \frac{x^2+3}{x^3+x^2-2x}\,dx$ 112. $\displaystyle\int \frac{x\ dx}{x^3+2x^2+x+2}$ 113. $\displaystyle\int \frac{2x^2-x+2}{x^5+2x^3+x}\,dx$

114. $\displaystyle\int \frac{4^x+2^x}{8^x-4^{x+1}}\,dx$ 115. $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^4+2x^2}\,dx$ 116. $\displaystyle\int \frac{x^2+8x+14}{(2x+4)\left(x^2+2x+2\right)}\,dx$

117. $\displaystyle\int \frac{(2e^x-1)\ dx}{e^x-2e^{-x}+1}$ 118. $\displaystyle\int \frac{\tan x\ dx}{\sec^2 x+3}$ 119. $\displaystyle\int \coth(\ln x)\,dx$ 120. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\operatorname{sen} x}}{\cos x}\,dx$

120. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{\cos x}}{\operatorname{sen} x}\,dx$ 122. $\displaystyle\int \operatorname{csch}(2\ln x)\,dx$ 123. $\displaystyle\int \frac{\left(2+\tan^3 x\right)\ dx}{\sec^2 x+2\tan x}$

124. $\displaystyle\int \frac{\tan^2 x\ dx}{\sec^2 x+3}$ 125. $\displaystyle\int \frac{\tan^3 x\ dx}{\sec^2 x-5}$

2. Calcular la siguientes integrales

1. $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{x^3+3x^2-18x-40}$ 2. $\displaystyle\int_0^3 \frac{3x^3-x^2+1}{x^3+x^2+4x+4}dx$ 3. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\left(x^2-2x+1\right)\ dx}{x^3+3x^2-4x-12}$

4. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{e^x\ dx}{e^{2x}+4e^x+3}$ 5. $\displaystyle\int_{-3}^{-2} \frac{\left(x^4-x^2+2\right)\ dx}{(x+1)^2\left(x^2+2\right)}$ 6. $\displaystyle\int_2^3 \frac{\left(\ln\left(x^2\right)+1\right)\ dx}{x\left(8\ln x+\ln^2 x+15\right)\ln x}$

7. $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \frac{\operatorname{sen}(2x)\ dx}{(\operatorname{sen} x-3)\left(9\operatorname{sen} x-2\cos^2 x+12\right)}$ 8. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left(\cos^3 x-\cos x\right)\ \operatorname{sen} x}{5\cos x+2\cos^2 x+1}\,dx$

9. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\left(\csc^2 x+1\right)\csc^2 x}{1+\cot^3 x}\,dx$ 10. $\displaystyle\int_1^3 \frac{\left(x^2+3\sqrt{x}-2\right)\ dx}{x^2-4x-12\sqrt{x}+3x^{3/2}}$ 11. $\displaystyle\int_{-2}^2 \frac{\left(x^5+3x^3\right)\ dx}{x^4+3x^2+1}$

12. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{2^x\ \left(4^x-3\left(2^x\right)\right)\ dx}{(2^x+1)(4^x-4)(2^x+3)^2}$ 13. $\displaystyle\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{\sec x\ dx}{6-\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen} x}$

14. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^3 x\ \cos x\ dx}{21-4\cos^2 x-8\cos x}$

Respuestas: Ejercicios

1.1. $x-\ln|x|+2\ln|x-1|+C$; 1.2. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C$; 1.3. $\ln\left|\frac{x}{x+2}\right|+C$; 1.4. $2\ln|t|-\ln|t-1|+\frac{1}{2}\ln|2t-1|+C$;
1.5. $3\ln|t-3|+2\ln|t+3|+C$; 1.6. $\frac{3}{2}x^2-3x+\ln|x-1|+8\ln|x+2|+C$; 1.7. $\frac{1}{2}t^2-2\ln|t|+7\ln\left|t^2-4\right|+C$;

1.8. $\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$; 1.9. $\ln|x+1| + \frac{4x+3}{2x^2+4x+2} + C$; 1.10. $2\ln\left|\frac{x}{x-1}\right| + \frac{1-2x}{x^2-x} + C$; 1.11. $\frac{-5x-3}{x^2-2x-3} + C$;

1.12. $6x + \frac{1}{2}x^2 + 28\ln|x-3| - \frac{30}{x-3} + C$; 1.13. $2\ln\left|\frac{t+1}{t}\right| - \frac{2t+1}{t^2+t} + C$; 1.14. $\frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right| + \frac{3}{2x^2-2} + C$;

1.15. $\frac{15}{2}\arctan(x-2) + \frac{1}{2}\ln\left|x^2-4x+5\right| + \frac{3x-17}{2x^2-8x+10} + C$; 1.16. $\frac{129}{343}\ln\left|\frac{2x+1}{x-3}\right| - \frac{307x+143}{196x^2-490x-294} + C$;

1.17. $-\frac{1}{x} - 3\arctan 3x + C$; 1.18. $\frac{1}{4}\ln\left(x^2+x+1\right) - \frac{1}{4}\ln\left(x^2-x+1\right) + \frac{\sqrt{3}}{6}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\sqrt{3}}{6}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$;

1.19. $x - 2\arctan x - \frac{1}{x} + C$; 1.20. $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right) + \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right) - \arctan x + C$; 1.21. $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + \frac{1}{2x^2+2} + C$;

1.22. $\frac{x}{8x^2+32} + \frac{1}{16}\arctan\frac{x}{2} + C$; 1.23. $\frac{1}{6}\frac{x-x^3}{x^4+x^2+1} + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right) + \frac{\sqrt{3}}{9}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\sqrt{3}}{9}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$;

1.24. $3\ln\left(\frac{x^2+3}{x^2+2}\right) - 3\sqrt{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right) + \frac{15}{4}\sqrt{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) - \frac{3x^3+6x^2+7x+15}{2\left(x^2+2\right)\left(x^2+3\right)} + C$; 1.25. $x - \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$;

1.26. $\frac{2}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln\left(x^2+x+1\right) + C$; 1.27. $\ln|x| - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right) + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$;

1.28. $ln|x+1| + \frac{1}{3}\frac{x+2}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right) + \frac{5\sqrt{3}}{9}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x+1)\right) + C$; 1.29. $\frac{1}{9}\ln\left|\frac{x+3}{x}\right| - \frac{1}{3x} + C$;

1.30. $3\ln|x| - 2\ln|x-2| + C$; 1.31. $x + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C$; 1.32. $\frac{1}{12}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln|x+2| + \frac{1}{4}\ln|x+3| + C$;

1.33. $\frac{3}{2}\ln|2x+1| - \frac{3}{4}\ln\left|4x^2-2x+1\right| + \frac{3\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(4x-1)\right) + C$; 1.34. $2\ln|t| - \frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right) + C$;

1.35. $\frac{1}{2}\ln\left(x^4-x^2+1\right) + C$; 1.36. $\ln|x+2| + \frac{2}{x+1} + C$; 1.37. $\frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln\left(x^2+x+1\right) - \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$

1.38. $\ln|x| - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right) - \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x+1)\right) + C$; 1.39. $5x + \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{7}{3}\ln|x-1| + \frac{161}{6}\ln|x-4| + C$;

1.40. $4\arctan(x-2) + \frac{1}{2}\ln\left(x^2-4x+5\right) - \ln|3x+2| + C$; 1.41. $\frac{2}{x} - \ln|x| + \frac{3}{2}\ln\left|\frac{(x-1)^3}{x+1}\right| + C$;

1.42. $\frac{3}{8}\arctan t + \frac{1}{8}\frac{3t^3+5t}{\left(t^2+1\right)^2} + C$; 1.43. $3\ln|x+4| - 2\ln|x-1| + C$; 1.44. $\arctan x - \ln|x-2| + 2\ln|x+3| + C$;

1.45. $\ln|x| - \frac{1}{2}\ln\left(2x^2+1\right) + C$; 1.46. $2\ln|x-2| + 3\ln|x+2| + C$; 1.47. $\frac{4}{9}\ln|x+2| + \frac{4}{3x+6} + \frac{1}{18}\ln|2x+1| + C$;

1.48. $\ln\left|\frac{t+1}{t+2}\right| + \frac{1}{t+2} + C$; 1.49. $-\frac{1}{4}\arctan(2x) + \frac{1}{8}\ln\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right| + C$; 1.50. $\frac{x}{4x^2+9} + \frac{1}{6}\arctan\left(\frac{2}{3}x\right) + C$;

1.51. $4\ln|x+1| + \frac{5}{3}\ln|3x-2| + C$; 1.52. $\frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln\left(x^2+x+1\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x-1)\right) + C$;

1.53. $\ln\left(x^2+4\right) - \ln|x-2| + C$; 1.54. $\ln|x| + 2\ln\left(x^2+4\right) + C$; 1.55. $4\ln|x-1| - 7\ln|x+3| + 5\ln|x-4| + C$;

1.56. $11\ln\left|\frac{2t+1}{t}\right| - \frac{11t+3}{2t^2+t} + C$; 1.57. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right| - \frac{1}{2}\arctan\left(e^x\right) + C$; 1.58. $e^x - \frac{3}{2}\arctan\left(e^x\right) + \frac{1}{2}\frac{e^x}{e^{2x}+1} + C$;

1.59. $\ln\left|x^2-2x\right| - 2\ln|x+1| + C$; 1.60. $\frac{3}{2}\ln\left(x^2+9\right) - 2\ln|2x-1| + C$; 1.61. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$;

1.62. $\frac{3}{2}\ln\left|t^2-1\right| - 2\ln|t| + C$; 1.63. $\frac{1}{b-a}\ln\left|\frac{t+a}{t+b}\right| + C$; 1.64. $\frac{x}{x^2+4} - \frac{5}{2}\frac{1}{x^2+4} + \frac{3}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}x\right) + C$;

1.65. $256x + \frac{16}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + 512\ln\left|\frac{x-4}{x+4}\right| + C$; 1.66. $x + \frac{4}{5}\ln|x-2| - \frac{9}{5}\ln|x+3| + C$; 1.67. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\ln x-3}{\ln x-1}\right| + C$;

1.68. $\ln\left|x^2-4\right| + \frac{3}{2}\ln\left(x^2+4\right) + C$; 1.69. $t + \frac{2}{3}\ln|t-2| - \frac{1}{3}\ln\left(t^2+2t+4\right) - \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{t+1}{\sqrt{3}}\right) + C$;

1.70. $\frac{1}{4}t + \ln|t| - \frac{7}{16}\ln|2t-1| - \frac{9}{16}\ln|2t+1| + C$; 1.71. $\ln|\operatorname{sen} x| - \frac{1}{2}\ln\left(\operatorname{sen}^2 x+1\right) + C$;

1.72. $\frac{5}{2}\arctan x + \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right) + C$; 1.73. $\frac{1}{6}\ln|t-2| - \frac{1}{12}\ln\left(t^2+2t+4\right) + \frac{\sqrt{3}}{6}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(t+1)\right) + C$;

1.74. $4\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + \frac{3}{x} + C$; 1.75. $5\ln|x+2| + \frac{3}{x+2} + C$; 1.76. $2\ln|x+2| - 2\ln|x+1| + 3\ln|x+3| + C$;

1.77. $-\frac{3}{x-1} - \frac{1}{3(3x+2)} - \frac{2}{3}\ln|3x+2| - 2\ln|x-1| + C$; 1.78. $\frac{1}{2}x - 3\ln|x+1| + \frac{1}{4}\ln|2x+3| + C$;

1.79. $\ln|x| + \frac{1}{x^2+1} + C$; 1.80. $2x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{x-1} - \ln\left|x^2+2x-3\right| + C$; 1.81. $4\ln|x+5| - \ln|x-2| + C$;

1.82. $x + 3\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C$; 1.83. $\ln\left(x^2-2x+3\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right) + \frac{7\sqrt{2}}{4}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1)\right) + C$;

1.84. $2\ln|x-1| + 3\ln|x-2| - \frac{1}{x-1} + C$; 1.85. $\frac{30}{343}\ln\left|\frac{x-5}{x+2}\right| + \frac{8}{49(x-5)} - \frac{27}{49(x+2)} + C$; 1.86. $x + \ln\left|\frac{(x-1)^2}{x+1}\right| + C$;

1.87. $\frac{1}{2}x^2 - 24\ln|x-2| + \frac{88x-139}{(x-2)^2} + C$; 1.88. $-\frac{1}{x^2-3x+2} + C$; 1.89. $2\ln\left(x^2+4\right) - 2\ln|x| + \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + C$;

1.90. $2\ln|x| + \frac{1}{x} + 3\ln|x+2| + C$; 1.91. $\frac{5}{162}\ln\left(9x^2+3x+1\right) - \frac{2}{81}\ln|3x-1| + \frac{5\sqrt{3}}{27}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(6x+1)\right) + C$;

1.92. $3\ln|x-2| - \ln|x+3| + \ln|2x-1| + C$; 1.93. $2\ln|x| - \frac{3}{4}\ln|x-1| - \frac{5}{4}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\frac{x-4}{x^2-1} + C$;

1.94. $\ln|\tan x+1| + \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2\tan x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$; 1.95. $\ln\left|\frac{x^3}{(x+1)^2}\right| + \frac{8}{x+1} + C$; 1.96. $\ln|x| + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{(2x+1)^3}{2x-1}\right| + C$;

1.97. $2\ln|x+2| - \arctan(x+1) + C$; 1.98. $\ln\left|\frac{x+3}{\sqrt{2x+1}}\right| + C$; 1.99. $\arctan(x+1) + \frac{x}{x^2+2x+2} - \frac{1}{2x^2+4x+4} + C$;

1.100. $\frac{1}{52}\ln|x-3| - \frac{1}{20}\ln|x-1| + \frac{7}{130}\arctan(x+2) + \frac{1}{65}\ln\left(x^2+4x+5\right) + C$; 1.101. $\ln\left|\frac{(2x-1)^2}{x+5}\right| + C$;

1.102. $-\frac{3x+1}{x^2}+\ln\left|\frac{2x+5}{x}\right|+C$; 1.103. $2\ln|x|+\ln|x-4|+\frac{1}{x-4}+C$; 1.104. $\frac{1}{x}+3\ln|x-1|+C$;

1.105. $\frac{1}{3x^3}+\ln|2x-1|+C$; 1.106. $2\ln|x|-\frac{1}{x+3}+C$; 1.107. $\ln\left|\frac{t^3-2t^2}{t+1}\right|+C$; 1.108. $\arctan x+\ln|x-1|+C$;

1.109. $2\ln|x|-3\ln|x-3|-4\ln|x+3|+C$; 1.110. $2x-\ln\left((e^x+1)^2+e^x+2\right)-\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2e^x+3}{\sqrt{3}}\right)+C$;

1.111. $\frac{4}{3}\ln|x-1|-\frac{3}{2}\ln|x|+\frac{7}{6}\ln|x+2|+C$; 1.112. $\frac{1}{5}\arctan x-\frac{2}{5}\ln|x+2|+\frac{1}{5}\ln\left(x^2+1\right)+C$;

1.113. $2\ln|x|-\frac{1}{2}\arctan x-\ln\left(x^2+1\right)-\frac{x}{2x^2+2}+C$; 1.114. $\frac{1}{\ln 2}\left(\frac{2^{-x}}{4}-\frac{5x}{16}\ln 2+\frac{5}{16}\ln|2^x-4|\right)+C$;

1.115. $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2\right)+C$; 1.116. $\frac{1}{2}\ln|x+2|+3\arctan(x+1)+C$; 1.117. $\frac{1}{3}\ln|e^x-1|+\frac{5}{3}\ln(e^x+2)+C$;

1.118. $\frac{1}{3}\ln|\sec x|-\frac{1}{6}\ln\left(\sec^2 x+3\right)+C$; 1.119. $x+\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$; 1.120. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{\operatorname{sen} x}+1}{\sqrt{\operatorname{sen} x}-1}\right|-\arctan\left(\sqrt{\operatorname{sen} x}\right)+C$;

1.121. $\frac{1}{2}\ln\left|\cos^{2/3}x-1\right|-\frac{1}{4}\ln\left(\cos^{4/3}x+\cos^{2/3}x+1\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{2\cos^{2/3}x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$; 1.122. $\arctan x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$;

1.123. $2\ln|\tan x+1|-\frac{1}{2}\ln\left(\sec^2 x\right)-\frac{1}{2\tan x+2}-\frac{1}{2}x+C$; 1.124. $\frac{2}{3}\arctan\left(\frac{1}{2}\tan x\right)-\frac{1}{3}x+C$;

1.125. $\frac{1}{5}\ln|\sec x|+\frac{2}{5}\ln\left|\sec^2 x-5\right|+C$; 2.1. $\frac{7}{54}\ln 2-\frac{5}{54}\ln 5$; 2.2. $\frac{11}{10}\ln 4-\frac{17}{10}\ln 13-\frac{43}{10}\arctan\left(\frac{3}{2}\right)+9$;

2.3. $\frac{16}{5}\ln 2-\frac{23}{10}\ln 3$; 2.4. $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{6}{5}\right)$; 2.5. $\frac{2}{9}\ln 2-\frac{8}{9}\ln 6+\frac{8}{9}\ln 11+\frac{4}{9}\sqrt{2}\arctan\sqrt{2}-\frac{4}{9}\sqrt{2}\arctan\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)+\frac{4}{3}$;

2.6. $\frac{1}{15}\ln\left(\frac{\ln 3}{\ln 2}\right)+\frac{5}{6}\ln\left(\frac{\ln 3+3}{\ln 2+3}\right)+\frac{9}{10}\ln\left(\frac{\ln 2+5}{\ln 3+5}\right)$; 2.7. $\frac{20}{11}\ln 5-\frac{56}{55}\ln 3-\frac{144}{55}\ln 2$; 2.8. 0; 2.9. $-\ln 2-\frac{2}{9}\pi\sqrt{3}$;

2.10. $4\ln 3-28\ln 4-4\ln\left(\sqrt{3}+2\right)+28\ln\left(\sqrt{3}+3\right)+2\ln\left(2-\sqrt{3}\right)+8-6\sqrt{3}$; 2.11. 0;

2.12. $\frac{71}{25}\frac{\ln 3}{\ln 2}-\frac{5}{2}\frac{\ln 5}{\ln 2}+\frac{54}{25}\frac{\ln 7}{\ln 2}-\frac{9}{140}\frac{1}{\ln 2}-\frac{349}{75}$; 2.13. $\frac{11}{40}\ln 3-\frac{1}{24}\ln 5-\frac{1}{40}\ln 7$; 2.14. $\frac{33}{16}\ln 5-\frac{3}{32}\ln 3-\frac{63}{32}\ln 7+\frac{5}{8}$;

Bibliografía

1. **Purcell, E. - Varberg, D. - Rigdon, S.**: "*Cálculo*". Novena Edición. PEARSON Prentice Hall.
2. **Stewart, J.**: "*Cálculo*". Grupo Editorial Iberoamericano.
3. **Thomas, George**: "*Cálculo de una variable*". 12ma edición. Pearson.
4. **Larson - Hostetler - Edwards**, "*Cálculo*". Vol. 1. Mc Graw Hill.
5. **Leithold, Louis**, "*El cálculo con geometría analítica*". Harla S.A.

Este material ha sido revisado recientemente, pero esto no garantiza que esté libre de errores, por esa razón se agradece reportar cualquier error que usted encuentre en este material enviando un mensaje al correo electrónico

farith.math@gmail.com

indicando donde se encuentra(n) dicho(s) error(es). **MUCHAS GRACIAS**.

Método de integración: Cambio universal.

Objetivos a cubrir **Código : MAT-CI.13**

- Método de integración: Cambio universal.
- Método de integración: Funciones irracionales.

Ejercicios resueltos

Ejemplo 287 *: Haciendo* $\tan\left(\frac{x}{2}\right)=u$. *Expresar la función trigonométrica* $f(x)=\operatorname{sen}x$ *en términos de la variable* u.

Solución : Tenemos que

$$\operatorname{sen}x=\operatorname{sen}\left(2\,\frac{x}{2}\right)\overset{\boxed{\begin{array}{c}\text{Identidad trigonométrica}\\ \operatorname{sen}(2\beta)=2\operatorname{sen}\beta\cos\beta\end{array}}}{=}2\,\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\,\cos\left(\frac{x}{2}\right)\overset{\boxed{\begin{array}{c}\text{Multiplicamos y dividimos por}\\ \cos\left(\frac{x}{2}\right)\end{array}}}{=}2\,\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\,\cos\left(\frac{x}{2}\right)\,\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$=2\,\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}\,\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\underset{\boxed{\begin{array}{c}\text{Funciones trigonométricas}\\ \tan\beta=\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}\quad\text{y}\quad\cos^2\beta=\frac{1}{\sec^2 x}\end{array}}}{=}2\,\tan\left(\frac{x}{2}\right)\,\frac{1}{\underbrace{\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)}_{\boxed{\begin{array}{c}\text{Identidad trigonométrica}\\ \sec^2\beta=\tan^2\beta+1\end{array}}}}=\frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+1}\underset{\boxed{\begin{array}{c}\text{Cambio de variable}\\ \tan\left(\frac{x}{2}\right)=u\end{array}}}{=}\frac{2u}{u^2+1}.$$

Luego,

$$\operatorname{sen}x=\frac{2u}{u^2+1}.$$

★

Ejemplo 288 *: Derivar* $\tan\left(\frac{x}{2}\right)=u$ *y escriba el diferencial de* x, *es decir,* dx, *en función de la variable* u.

Solución : Tenemos que

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right)=u\qquad\Longrightarrow\qquad\frac{x}{2}=\arctan u\qquad\Longrightarrow\qquad x=2\arctan u,$$

derivamos respecto a u y obtenemos

$$\frac{dx}{du}=(2\arctan u)'=2(\arctan u)'=2\,\frac{1}{1+u^2}\qquad\Longrightarrow\qquad dx=\frac{2\,du}{1+u^2}.$$

Luego,

$$dx=\frac{2\,du}{1+u^2}.$$

★

Ejemplo 289 *: Integre* $\displaystyle\int\frac{dx}{1-\cos x}$.

Solución : Proponemos el cambio de variable

$$u=\tan\left(\frac{x}{2}\right),$$

por lo tanto,

$$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \qquad \text{y} \qquad dx = \frac{2\ du}{1+u^2},$$

la integral se transforma en

Diferencial $dx = \dfrac{2\ du}{1+u^2}$

$$\int \frac{dx}{1-\underbrace{\cos x}} = \int \frac{\dfrac{2\ du}{1+u^2}}{1-\dfrac{1-u^2}{1+u^2}} = \int \frac{\dfrac{2\ du}{1+u^2}}{\dfrac{1+u^2-\left(1-u^2\right)}{1+u^2}} = \int \frac{\dfrac{2\ du}{1+u^2}}{\dfrac{1+u^2-1+u^2}{1+u^2}}$$

Cambio de variable $u = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right) \implies \cos x = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$

$\displaystyle\int u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n=-2$

$$= \int \frac{\dfrac{2\ du}{1+u^2}}{\dfrac{2u^2}{1+u^2}} = \int \frac{2\left(1+u^2\right)}{2u^2\left(1+u^2\right)}\ du = \int \frac{1}{u^2}\ du = \overbrace{\int u^{-2}\ du} = \frac{u^{-2+1}}{-2+1} + C$$

$$= \frac{u^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)} + C = -\cot\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$

Regreso del cambio de variable $u = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$

Luego,

$$\int \frac{dx}{1-\cos x} = -\cot\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$

★

Ejemplo 290 *: Integre* $\displaystyle\int \sec t\ dt$.

Solución : Proponemos el cambio de variable

$$u = \tan\left(\frac{t}{2}\right),$$

por lo tanto,

$$\operatorname{sen} t = \frac{2u}{1+u^2}, \qquad \cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2} \qquad \text{y} \qquad dt = \frac{2\ du}{1+u^2},$$

la integral se transforma en

$$\int \sec t\ dt = \int \frac{1}{\cos t}\ dt = \int \frac{1}{\dfrac{1-u^2}{1+u^2}}\ \frac{2\ du}{1+u^2} = \int \frac{2\ du}{1-u^2},$$

para obtener la familia de primitivas de la última integral aplicamos descomposición en fracciones simples, para ello debemos factorizar el polinomio del denominador

$$1-u^2 = (1-u)(1+u),$$

así,

$$\frac{2}{1-u^2}=\frac{A}{1-u}+\frac{B}{1+u},$$

de aquí, desarrollando

$$\frac{2}{1-u^2}=\frac{A}{1-u}+\frac{B}{1+u}=\frac{A\,(1+u)+B\,(1-u)}{(1-u)\,(1+u)},$$

es decir,

$$\frac{2}{1-u^2}=\frac{A\,(1+u)+B\,(1-u)}{(1-u)\,(1+u)} \qquad \Longrightarrow \qquad 2=A\,(1+u)+B\,(1-u)$$

Para obtener los valores de las constantes le damos valores arbitrarios a u.

Si $u=-1$, sustituimos en la igualdad

$$2=A\,(1+u)+B\,(1-u)$$

y se tiene

$$2=A\,(1+(-1))+B\,(1-(-1)),$$

así,

$$2=A\,(0)+B\,(2) \qquad \Longrightarrow \qquad 2=2B \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{B=1.}$$

Si $u=1$, sustituimos en la igualdad

$$2=A\,(1+u)+B\,(1-u)$$

y se tiene

$$2=A\,(1+(1))+B\,(1-(1)),$$

así,

$$2=A\,(2)+B\,(0) \qquad \Longrightarrow \qquad 2=2A \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{A=1}$$

Entonces,

$$\frac{2}{1-u^2}=\frac{A}{1-u}+\frac{B}{1+u},$$

queda

$$\frac{2}{1-u^2}=\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u},$$

por lo tanto

$$\int\frac{2\;du}{1-u^2}=\int\frac{du}{1-u}+\int\frac{du}{1+u},$$

donde la familia de primitivas de la función $f\,(u)=\dfrac{1}{1-u}$ se obtiene con el cambio de variable

$$z=1-u \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Calculo del}} \qquad dz=-du \qquad \Longrightarrow \qquad -dx=du,$$

entonces, la integral queda

$$\int\frac{du}{1-u}=\int\frac{-dz}{z}=-\ln|z|+C_1=-\ln|1-u|+C_1=-\ln|(-1)\,(u-1)|+C_1$$

$$=-\ln\left(|-1|\,|u-1|\right)+C_1=-\ln|u-1|+C_1,$$

mientras que, para la familia de primitivas de la función $g(u) = \dfrac{1}{u+1}$, proponemos el cambio

$$z = u + 1 \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Calculo del}} \qquad dz = du,$$

la integral nos queda

$$\int \frac{du}{1+u} = \int \frac{dz}{z} = \ln|z| + C_2 = \ln|u+1| + C_2,$$

por lo tanto,

$$\int \frac{2\ du}{1-u^2} = -\ln|u-1| + \ln|u+1| + C = \ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right| + C,$$

como $u = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$, entonces

$$\int \sec t\ dt = \int \frac{2\ du}{1-u^2} = \ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right| + C = \ln\left|\frac{\tan\left(\frac{t}{2}\right)+1}{\tan\left(\frac{t}{2}\right)-1}\right| + C.$$

Finalmente,

$$\int \sec t\ dt = \ln\left|\frac{\tan\left(\frac{t}{2}\right)+1}{\tan\left(\frac{t}{2}\right)-1}\right| + C.$$

★

Ejemplo 291 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{2\ dx}{1+\cot x}$.

Solución : Proponemos el cambio de variable

$$u = \tan\left(\frac{x}{2}\right),$$

por lo tanto,

$$\operatorname{sen} x = \frac{2u}{1+u^2}, \qquad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \qquad \text{y} \qquad dx = \frac{2\ du}{1+u^2},$$

la integral se transforma en

$$\int \frac{2\ dx}{1+\cot x} = \int \frac{2\ dx}{1+\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} = \int \frac{2\ dx}{\dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x}} = \int \frac{2 \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + \cos x}\ dx = \int \frac{2\ \dfrac{2u}{1+u^2}}{\dfrac{2u}{1+u^2} + \dfrac{1-u^2}{1+u^2}}\ \frac{2\ du}{1+u^2}$$

$$= \int \frac{\dfrac{4u}{1+u^2}}{\dfrac{2u+1-u^2}{1+u^2}}\ \frac{2\ du}{1+u^2} = \int \frac{4u}{2u+1-u^2}\ \frac{2\ du}{1+u^2} = \int \frac{8u\ du}{(-u^2+2u+1)(1+u^2)}$$

$$= \int \frac{-8u\ du}{(u^2-2u-1)(1+u^2)}$$

para obtener la familia de primitivas de la última integral aplicamos descomposición en fracciones simples, para ello debemos factorizar los polinomios del denominador

- Para el polinomio $q(u) = u^2 - 2u - 1$, por ser un polinomio de segundo grado, aplicamos la resolvente con $a = 1$, $b = -2$ y $c = -1$, para hallar sus raíces y así, su factorización

$$u = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = \frac{2\left(1 \pm \sqrt{2}\right)}{2} = 1 \pm \sqrt{2} \implies \begin{cases} u = 1 - \sqrt{2} \\ \\ u = 1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

así, el polinomio q tiene dos raíces reales, $u = 1 - \sqrt{2}$ y $u = 1 + \sqrt{2}$, luego, la factorización de q es

$$q(u) = \left(u - \left(1 - \sqrt{2}\right)\right)\left(u - \left(1 + \sqrt{2}\right)\right).$$

- Para el polinomio $r(u) = u^2 + 1$, por ser un polinomio de segundo grado, aplicamos la resolvente para obtener sus raíces y por ende, su factorización. Aplicamos la resolvente para $a = 1$, $b = 0$ y $c = 1$,

$$u = \frac{-(0) \pm \sqrt{(0)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} \longleftarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Raíz cuadrada de un} \\ \text{número negativo.} \\ \text{Número complejo.}\end{array}}$$

así, el polinomio r **no** tiene raíces reales, por lo tanto, es un polinomio **irreducible**.

Luego, el denominador se escribe como

$$\left(u^2 - 2u - 1\right)\left(1 + u^2\right) = \left(u - \left(1 - \sqrt{2}\right)\right)\left(u - \left(1 + \sqrt{2}\right)\right)\left(1 + u^2\right).$$

Por lo tanto,

$$\frac{-8u}{\left(u^2 - 2u - 1\right)\left(1 + u^2\right)} = \frac{-8u}{\left(u - \left(1 - \sqrt{2}\right)\right)\left(u - \left(1 + \sqrt{2}\right)\right)\left(1 + u^2\right)}$$

y las fracciones simples asociadas vienen dadas por

$$\frac{-8u}{\left(u - \left(1 - \sqrt{2}\right)\right)\left(u - \left(1 + \sqrt{2}\right)\right)\left(1 + u^2\right)} = \frac{A}{u - \left(1 - \sqrt{2}\right)} + \frac{B}{u - \left(1 + \sqrt{2}\right)} + \frac{Cu + D}{1 + u^2},$$

desarrollando

$$\frac{-8u}{\left(u^2 - 2u - 1\right)\left(1 + u^2\right)} = \frac{A\left(u - \left(1 + \sqrt{2}\right)\right)\left(1 + u^2\right) + B\left(u - \left(1 - \sqrt{2}\right)\right)\left(1 + u^2\right)}{\left(u - \left(1 - \sqrt{2}\right)\right)\left(u - \left(1 + \sqrt{2}\right)\right)\left(1 + u^2\right)}$$

$$+ \frac{(Cu + D)\left(u - \left(1 - \sqrt{2}\right)\right)\left(u - \left(1 + \sqrt{2}\right)\right)}{\left(u - \left(1 - \sqrt{2}\right)\right)\left(u - \left(1 + \sqrt{2}\right)\right)\left(1 + u^2\right)},$$

lo cual se cumple si y solo si

$$-8u = A\left(u - \left(1 + \sqrt{2}\right)\right)\left(1 + u^2\right) + B\left(u - \left(1 - \sqrt{2}\right)\right)\left(1 + u^2\right)$$

$$+ (Cu + D)\left(u - \left(1 - \sqrt{2}\right)\right)\left(u - \left(1 + \sqrt{2}\right)\right).$$

Para obtener los valores de las constantes le damos valores arbitrarios a u.

Si $u = 1 + \sqrt{2}$, sustituimos en la igualdad

$$-8u = A\left(u - \left(1 + \sqrt{2}\right)\right)\left(1 + u^2\right) + B\left(u - \left(1 - \sqrt{2}\right)\right)\left(1 + u^2\right)$$

$$+ (Cu + D)\left(u - \left(1 - \sqrt{2}\right)\right)\left(u - \left(1 + \sqrt{2}\right)\right)$$

y se tiene

$$-8\left(1+\sqrt{2}\right)=A\left(\left(1+\sqrt{2}\right)-\left(1+\sqrt{2}\right)\right)\left(1+\left(1+\sqrt{2}\right)^{2}\right)+B\left(\left(1+\sqrt{2}\right)-\left(1-\sqrt{2}\right)\right)\left(1+\left(1+\sqrt{2}\right)^{2}\right)$$
$$+\left(C\left(1+\sqrt{2}\right)+D\right)\left(\left(1+\sqrt{2}\right)-\left(1-\sqrt{2}\right)\right)\left(\left(1+\sqrt{2}\right)-\left(1+\sqrt{2}\right)\right),$$

así,

$$-8\left(1+\sqrt{2}\right)=A\left(0\right)\left(1+\left(1+\sqrt{2}\right)^{2}\right)+B\left(2\sqrt{2}\right)\left(4+2\sqrt{2}\right)+\left(C\left(1+\sqrt{2}\right)+D\right)\left(2\sqrt{2}\right)\left(0\right),$$

de aquí,

$$-8\left(1+\sqrt{2}\right)=B\left(2\sqrt{2}\right)\left(4+2\sqrt{2}\right)\quad\Longrightarrow\quad -8\left(1+\sqrt{2}\right)=B\left(8\sqrt{2}+8\right)\quad\Longrightarrow\quad \boxed{B=-1.}$$

Si $u=1-\sqrt{2}$, sustituimos en la igualdad

$$-8u=A\left(u-\left(1+\sqrt{2}\right)\right)\left(1+u^{2}\right)+B\left(u-\left(1-\sqrt{2}\right)\right)\left(1+u^{2}\right)$$
$$+\left(Cu+D\right)\left(u-\left(1-\sqrt{2}\right)\right)\left(u-\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$$

y se tiene

$$-8\left(1-\sqrt{2}\right)=A\left(\left(1-\sqrt{2}\right)-\left(1+\sqrt{2}\right)\right)\left(1+\left(1-\sqrt{2}\right)^{2}\right)+B\left(\left(1-\sqrt{2}\right)-\left(1-\sqrt{2}\right)\right)\left(1+\left(1-\sqrt{2}\right)^{2}\right)$$
$$+\left(C\left(1-\sqrt{2}\right)+D\right)\left(\left(1-\sqrt{2}\right)-\left(1-\sqrt{2}\right)\right)\left(\left(1-\sqrt{2}\right)-\left(1+\sqrt{2}\right)\right),$$

así,

$$-8\left(1-\sqrt{2}\right)=A\left(-2\sqrt{2}\right)\left(4-2\sqrt{2}\right)+B\left(0\right)\left(1+\left(1-\sqrt{2}\right)^{2}\right)+\left(C\left(1-\sqrt{2}\right)+D\right)\left(0\right)\left(-2\sqrt{2}\right),$$

de aquí,

$$-8\left(1-\sqrt{2}\right)=A\left(-2\sqrt{2}\right)\left(4-2\sqrt{2}\right)\quad\Longrightarrow\quad -8\left(1-\sqrt{2}\right)=A\left(-8\sqrt{2}+8\right)\quad\Longrightarrow\quad \boxed{A=-1.}$$

Si $u=0$, sustituimos en la igualdad

$$-8u=A\left(u-\left(1+\sqrt{2}\right)\right)\left(1+u^{2}\right)+B\left(u-\left(1-\sqrt{2}\right)\right)\left(1+u^{2}\right)$$
$$+\left(Cu+D\right)\left(u-\left(1-\sqrt{2}\right)\right)\left(u-\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$$

y se tiene

$$-8\left(0\right)=A\left(\left(0\right)-\left(1+\sqrt{2}\right)\right)\left(1+\left(0\right)^{2}\right)+B\left(\left(0\right)-\left(1-\sqrt{2}\right)\right)\left(1+\left(0\right)^{2}\right)$$
$$+\left(C\left(0\right)+D\right)\left(\left(0\right)-\left(1-\sqrt{2}\right)\right)\left(\left(0\right)-\left(1+\sqrt{2}\right)\right),$$

así,

$$0=A\left(-\left(1+\sqrt{2}\right)\right)\left(1\right)+B\left(-\left(1-\sqrt{2}\right)\right)\left(1\right)+D\left(-\left(1-\sqrt{2}\right)\right)\left(-\left(1+\sqrt{2}\right)\right),$$

es decir,

$$0=-A\left(1+\sqrt{2}\right)-B\left(1-\sqrt{2}\right)+D\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right),$$

como $A=-1$ y $B=-1$, entonces

$$0=-(-1)\left(1+\sqrt{2}\right)-(-1)\left(1-\sqrt{2}\right)+D\left((-1)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2\right),$$

de aquí,

$$0=1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+D(1-2) \quad\Longrightarrow\quad 0=2-D \quad\Longrightarrow\quad \boxed{D=2.}$$

Si $u=1$, sustituimos en la igualdad

$$-8u=A\left(u-\left(1+\sqrt{2}\right)\right)\left(1+u^2\right)+B\left(u-\left(1-\sqrt{2}\right)\right)\left(1+u^2\right)$$
$$+\left(Cu+D\right)\left(u-\left(1-\sqrt{2}\right)\right)\left(u-\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$$

y se tiene

$$-8(1)=A\left((1)-\left(1+\sqrt{2}\right)\right)\left(1+(1)^2\right)+B\left((1)-\left(1-\sqrt{2}\right)\right)\left(1+(1)^2\right)$$
$$+\left(C(1)+D\right)\left((1)-\left(1-\sqrt{2}\right)\right)\left((1)-\left(1+\sqrt{2}\right)\right),$$

así,

$$-8=A\left(-\sqrt{2}\right)(2)+B\left(\sqrt{2}\right)(2)+(C+D)\left(\sqrt{2}\right)\left(-\sqrt{2}\right),$$

es decir,

$$-8=-2\sqrt{2}A+2\sqrt{2}B-2(C+D),$$

como $A=-1$, $B=-1$ y $D=2$, entonces

$$-8=-2\sqrt{2}(-1)+2\sqrt{2}(-1)-2(C+2),$$

de aquí,

$$-8=2\sqrt{2}-2\sqrt{2}-2C-4 \quad\Longrightarrow\quad -8=-2C-4 \quad\Longrightarrow\quad \boxed{C=2.}$$

Entonces,

$$\frac{-8u}{\left(u^2-2u-1\right)\left(1+u^2\right)}=\frac{A}{u-\left(1-\sqrt{2}\right)}+\frac{B}{u-\left(1+\sqrt{2}\right)}+\frac{Cu+D}{1+u^2},$$

queda

$$\frac{-8u}{\left(u^2-2u-1\right)\left(1+u^2\right)}=\frac{-1}{u-\left(1-\sqrt{2}\right)}+\frac{-1}{u-\left(1+\sqrt{2}\right)}+\frac{2u+2}{1+u^2},$$

por lo tanto

$$\int\frac{-8u\,du}{\left(u^2-2u-1\right)\left(1+u^2\right)}=\int\frac{-du}{u-\left(1-\sqrt{2}\right)}+\int\frac{-du}{u-\left(1+\sqrt{2}\right)}+\int\frac{2u+2}{1+u^2}\,du.$$

Resolvemos cada una de las integrales en que se escribió la integral original

- Para $\displaystyle\int\frac{-du}{u-\left(1-\sqrt{2}\right)}$. Se propone el cambio de variable

$$z=u-\left(1-\sqrt{2}\right) \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Calculo del}} \qquad dz=du,$$

entonces, la integral queda

$$\int\frac{-du}{u-\left(1-\sqrt{2}\right)}=\int\frac{-dz}{z}=-\ln|z|+C_1=-\ln\left|u-\left(1-\sqrt{2}\right)\right|+C_1.$$

- Para $\displaystyle\int \frac{-du}{u-(1+\sqrt{2})}$. Se propone el cambio de variable

$$z = u - \left(1+\sqrt{2}\right) \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Calculo del}} \qquad dz = du,$$

entonces, la integral queda

$$\int \frac{-du}{u-(1+\sqrt{2})} = \int \frac{-dz}{z} = -\ln|z| + C_2 = -\ln\left|u - \left(1+\sqrt{2}\right)\right| + C_2.$$

- Para $\displaystyle\int \frac{2u+2}{1+u^2}\,du$. Escribimos la integral como

$$\int \frac{2u+2}{1+u^2}\,du = \int \frac{2u}{1+u^2}\,du + \int \frac{2}{1+u^2}\,du,$$

donde, para la primera integral se propone el cambio de variable

$$z = u^2+1 \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Calculo del}} \qquad dz = 2u\,du,$$

entonces, la integral queda

$$\int \frac{2u}{1+u^2}\,du = \int \frac{dz}{z} = \ln|z| + C_3 = \ln\left|u^2+1\right| + C_3,$$

mientras que la segunda integral es una integral de tabla

$$\int \frac{2}{1+u^2}\,du = 2\int \frac{du}{1+u^2} = 2\arctan u + C_4.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{-8u\,du}{(u^2-2u-1)(1+u^2)} &= -\ln\left|u-\left(1-\sqrt{2}\right)\right| - \ln\left|u-\left(1+\sqrt{2}\right)\right| + \ln\left|u^2+1\right| + 2\arctan u + C\\ &= -\ln\left|\left(u-\left(1-\sqrt{2}\right)\right)\left(u-\left(1+\sqrt{2}\right)\right)\right| + \ln\left|u^2+1\right| + 2\arctan u + C\\ &= -\ln\left|u^2-2u-1\right| + \ln\left|u^2+1\right| + 2\arctan u + C,\end{aligned}$$

como $u = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$, entonces

$$\begin{aligned}\int \frac{2\,dx}{1+\cot x} &= \int \frac{-8u\,du}{(u^2-2u-1)(1+u^2)}\\ &= -\ln\left|\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) - 2\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right| + \ln\left|\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+1\right| + 2\arctan\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C\\ &= -\ln\left|\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) - 2\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right| + \ln\left|\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)\right| + 2\,\frac{x}{2} + C\\ &= -\ln\left|\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) - 2\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right| - \ln\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right| + x + C.\end{aligned}$$

Finalmente

$$\int \frac{2\,dx}{1+\cot x} = x - \ln\left|\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) - 2\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right| - \ln\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C.$$

★

Ejemplo 292 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{\sec x \ dx}{1+\operatorname{sen} x}$.

Solución : Proponemos el cambio de variable

$$u = \tan\left(\frac{x}{2}\right),$$

por lo tanto,

$$\operatorname{sen} x = \frac{2u}{1+u^2}, \qquad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \qquad \text{y} \qquad dx = \frac{2 \ du}{1+u^2},$$

la integral se transforma en

$$\int \frac{\sec x \ dx}{1+\operatorname{sen} x} = \int \frac{\dfrac{1}{\cos x}\ dx}{1+\operatorname{sen} x} = \int \frac{dx}{\cos x\,(1+\operatorname{sen} x)} = \int \frac{\dfrac{2 \ du}{1+u^2}}{\dfrac{1-u^2}{1+u^2}\left(1+\dfrac{2u}{1+u^2}\right)}$$

$$= \int \frac{\dfrac{2 \ du}{1+u^2}}{\dfrac{1-u^2}{1+u^2}\left(\dfrac{u^2+2u+1}{1+u^2}\right)} = \int \frac{2 \ du}{\left(1-u^2\right)\left(\dfrac{u^2+2u+1}{1+u^2}\right)} = \int \frac{2\left(1+u^2\right)\ du}{\left(1-u^2\right)\left(u^2+2u+1\right)},$$

para obtener la familia de primitivas de la última integral aplicamos descomposición en fracciones simples, para ello debemos factorizar la expresión del denominador, la cual viene dada por

$$\left(1-u^2\right)\left(u^2+2u+1\right) = (1-u)\,(1+u)\,(u+1)^2 = (1-u)\,(u+1)^3.$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{2\left(1+u^2\right)\ du}{\left(1-u^2\right)\left(u^2+2u+1\right)} = \int \frac{2\left(1+u^2\right)\ du}{(1-u)\,(u+1)^3}$$

y las fracciones simples asociadas vienen dadas por

$$\frac{2\left(1+u^2\right)}{(1-u)\,(u+1)^3} = \frac{A}{1-u} + \frac{B}{u+1} + \frac{C}{(u+1)^2} + \frac{D}{(u+1)^3},$$

desarrollando

$$\frac{2\left(1+u^2\right)}{(1-u)\,(u+1)^3} = \frac{A\,(u+1)^3 + B\,(1-u)\,(u+1)^2 + C\,(1-u)\,(u+1) + D\,(1-u)}{(1-u)\,(u+1)^3},$$

lo cual se cumple si y solo si

$$2\left(1+u^2\right) = A\,(u+1)^3 + B\,(1-u)\,(u+1)^2 + C\,(1-u)\,(u+1) + D\,(1-u).$$

Para obtener los valores de las constantes le damos valores arbitrarios a u.

Si $u=1$, sustituimos en la igualdad

$$2\left(1+u^2\right) = A\,(u+1)^3 + B\,(1-u)\,(u+1)^2 + C\,(1-u)\,(u+1) + D\,(1-u)$$

y se tiene

$$2\left(1+(1)^2\right) = A\,((1)+1)^3 + B\,(1-(1))\,((1)+1)^2 + C\,(1-(1))\,((1)+1) + D\,(1-(1)),$$

de aquí,

$$2\,(2)=A\,(2)^3+B\,(0)\,(2)^2+C\,(0)\,(2)+D\,(0)\qquad\Longrightarrow\qquad 4=8A\qquad\Longrightarrow\qquad \boxed{A=\frac{1}{2}.}$$

Si $u=-1$, sustituimos en la igualdad

$$2\left(1+u^2\right)=A\,(u+1)^3+B\,(1-u)\,(u+1)^2+C\,(1-u)\,(u+1)+D\,(1-u)$$

y se tiene

$$2\left(1+(-1)^2\right)=A\,((-1)+1)^3+B\,(1-(-1))\,((-1)+1)^2+C\,(1-(-1))\,((-1)+1)+D\,(1-(-1))\,,$$

de aquí,

$$2\,(2)=A\,(0)^3+B\,(2)\,(0)^2+C\,(2)\,(0)+D\,(2)\qquad\Longrightarrow\qquad 4=2D\qquad\Longrightarrow\qquad \boxed{D=2.}$$

Si $u=0$, sustituimos en la igualdad

$$2\left(1+u^2\right)=A\,(u+1)^3+B\,(1-u)\,(u+1)^2+C\,(1-u)\,(u+1)+D\,(1-u)$$

y se tiene

$$2\left(1+(0)^2\right)=A\,((0)+1)^3+B\,(1-(0))\,((0)+1)^2+C\,(1-(0))\,((0)+1)+D\,(1-(0))\,,$$

así,

$$2\,(1)=A\,(1)^3+B\,(1)\,(1)^2+C\,(1)\,(1)+D\,(1)\qquad\Longrightarrow\qquad 2=A+B+C+D,$$

como $A=\dfrac{1}{2}$ y $D=2$, se tiene

$$2=\left(\frac{1}{2}\right)+B+C+(2)\qquad\Longrightarrow\qquad 2=\frac{1}{2}+B+C+2\qquad\Longrightarrow\qquad \boxed{B+C=-\frac{1}{2}.}$$

Si $u=2$, sustituimos en la igualdad

$$2\left(1+u^2\right)=A\,(u+1)^3+B\,(1-u)\,(u+1)^2+C\,(1-u)\,(u+1)+D\,(1-u)$$

y se tiene

$$2\left(1+(2)^2\right)=A\,((2)+1)^3+B\,(1-(2))\,((2)+1)^2+C\,(1-(2))\,((2)+1)+D\,(1-(2))\,,$$

así,

$$2\,(5)=A\,(3)^3+B\,(-1)\,(3)^2+C\,(-1)\,(3)+D\,(-1)\qquad\Longrightarrow\qquad 10=27A-9B-3C-D,$$

como $A=\dfrac{1}{2}$ y $D=2$, se tiene

$$10=27\left(\frac{1}{2}\right)-9B-3C-(2)\,,$$

de aquí,

$$10=\frac{27}{2}-9B-3C-2\qquad\Longrightarrow\qquad -9B-3C=-\frac{3}{2}\qquad\Longrightarrow\qquad \boxed{3B+C=\frac{1}{2}.}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones

$$-1\left\{\begin{array}{r} B+C=-\dfrac{1}{2} \\ 3B+C=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{r} -B-C=\dfrac{1}{2} \\ 3B+C=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$2B=1 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{B=\frac{1}{2}.}$$

Sustituimos este valor en cualquiera de las dos ecuaciones del sistema, por ejemplo, sustituimos en la primera ecuación

$$\left(\frac{1}{2}\right)+C=-\frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad C=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{C=-1.}$$

Entonces,

$$\frac{2\left(1+u^2\right)}{(1-u)(u+1)^3}=\frac{A}{1-u}+\frac{B}{u+1}+\frac{C}{(u+1)^2}+\frac{D}{(u+1)^3},$$

queda

$$\frac{2\left(1+u^2\right)}{(1-u)(u+1)^3}=\frac{1/2}{1-u}+\frac{1/2}{u+1}+\frac{-1}{(u+1)^2}+\frac{2}{(u+1)^3},$$

por lo tanto

$$\int \frac{2\left(1+u^2\right)}{(1-u)(u+1)^3}\,du=\int \frac{1/2}{1-u}\,du+\int \frac{1/2}{u+1}\,du+\int \frac{-\,du}{(u+1)^2}+\int \frac{2\,du}{(u+1)^3},$$

Resolvemos cada una de las integrales en que se escribió la integral original

- Para $\displaystyle\int \frac{1/2}{1-u}\,du$. Se propone el cambio de variable

$$z=1-u \quad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Calculo del}} \quad dz=-du \quad \Longrightarrow \quad dz=-du,$$

entonces, la integral queda

$$\int \frac{1/2}{1-u}\,du=\frac{1}{2}\int \frac{-dz}{z}=-\frac{1}{2}\ln|z|+C_1=-\frac{1}{2}\ln|1-u|+C_1=-\frac{1}{2}\ln|(-1)(u-1)|+C_1$$
$$=-\frac{1}{2}\ln|-1|\,|u-1|+C_1=-\frac{1}{2}\ln|u-1|+C_1.$$

- Para $\displaystyle\int \frac{1/2}{u+1}\,du$. Se propone el cambio de variable

$$z=u+1 \quad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Calculo del}} \quad dz=du,$$

entonces, la integral queda

$$\int \frac{1/2}{u+1}\,du=\frac{1}{2}\int \frac{dz}{z}=\frac{1}{2}\ln|z|+C_2=\frac{1}{2}\ln|u+1|+C_2.$$

- Para $\displaystyle\int \frac{-\,du}{(u+1)^2}$. Se propone el cambio de variable

$$z = u+1 \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Calculo del}} \qquad dz = du,$$

entonces, la integral queda

$$\int \frac{-\,du}{(u+1)^2} = -\int \frac{dz}{z^2} = -\int z^{-2}\,dz = -\frac{z^{-2+1}}{-2+1} + C_3 = \frac{1}{z} + C_3 = \frac{1}{u+1} + C_3.$$

- Para $\displaystyle\int \frac{2\,du}{(u+1)^3}$. Se propone el cambio de variable

$$z = u+1 \qquad \xrightarrow[\text{diferencial}]{\text{Calculo del}} \qquad dz = du,$$

entonces, la integral queda

$$\int \frac{2\,du}{(u+1)^3} = 2\int \frac{dz}{z^3} = 2\int z^{-3}\,dz = 2\,\frac{z^{-3+1}}{-3+1} + C_4 = -\frac{1}{z^2} + C_4 = -\frac{1}{(u+1)^2} + C_4.$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{2\left(1+u^2\right)}{(1-u)(u+1)^3}\,du = -\frac{1}{2}\ln|u-1| + \frac{1}{2}\ln|u+1| + \frac{1}{u+1} - \frac{1}{(u+1)^2} + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right| + \frac{1}{u+1} - \frac{1}{(u+1)^2} + C,$$

como $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, entonces

$$\int \frac{\sec x\,dx}{1+\operatorname{sen} x} = \int \frac{2\left(1+u^2\right)}{(1-u)(u+1)^3}\,du = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right| + \frac{1}{u+1} - \frac{1}{(u+1)^2} + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)-1}\right| + \frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1} - \frac{1}{\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)^2} + C.$$

Finalmente

$$\int \frac{\sec x\,dx}{1+\operatorname{sen} x} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)-1}\right| + \frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1} - \frac{1}{\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)^2} + C.$$

★

Ejercicios

1. Haciendo $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = u$. Considere las funciones trigonométricas $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $f(x) = \cos x$. Expresar dichas funciones en variable u.
2. Derivar $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = u$ y escriba el diferencial de x, es decir, dx en función de la variable u.

3. Calcular las siguientes integrales haciendo el cambio universal $u = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-\cos x}$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-\operatorname{sen} x}$
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x}$
4. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos x}$
5. $\displaystyle\int \frac{dx}{3-\cos x}$
6. $\displaystyle\int \frac{dx}{3+\cos x}$
7. $\displaystyle\int \frac{dx}{2-\cos x}$
8. $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\cos x}$
9. $\displaystyle\int \frac{dx}{3-\operatorname{sen} x}$
10. $\displaystyle\int \frac{dx}{3+\operatorname{sen} x}$
11. $\displaystyle\int \frac{dx}{2-\operatorname{sen} x}$
12. $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\operatorname{sen} x}$
13. $\displaystyle\int \frac{dx}{3-5\operatorname{sen} x}$
14. $\displaystyle\int \frac{dx}{5+4\cos x}$
15. $\displaystyle\int \frac{3\ dx}{2\cos x+1}$
16. $\displaystyle\int \frac{dx}{5\operatorname{sen} x+3}$
17. $\displaystyle\int \frac{dt}{5\operatorname{sen} t+4}$
18. $\displaystyle\int \frac{dx}{4\cos x-5}$
19. $\displaystyle\int \frac{dx}{7-2\operatorname{sen} x}$
20. $\displaystyle\int \frac{dx}{7-9\cos x}$
21. $\displaystyle\int \tan x\ dx$
22. $\displaystyle\int \cot x\ dx$
23. $\displaystyle\int \sec t\ dt$
24. $\displaystyle\int \csc t\ dt$
25. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sec x}$
26. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-\sec x}$
27. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\csc x}$
28. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-\csc x}$
29. $\displaystyle\int \frac{dx}{\tan x-1}$
30. $\displaystyle\int \frac{8\ dx}{\tan x+1}$
31. $\displaystyle\int \frac{5\ dx}{1-\cot x}$
32. $\displaystyle\int \frac{2\ dx}{1+\cot x}$
33. $\displaystyle\int \frac{4\ dx}{3+\tan x}$
34. $\displaystyle\int \frac{3\ dx}{4-\tan x}$
35. $\displaystyle\int \frac{3\ dx}{3+2\sec x}$
36. $\displaystyle\int \frac{5\ dx}{6+4\sec x}$
37. $\displaystyle\int \frac{\sec x\ dx}{1+\operatorname{sen} x}$
38. $\displaystyle\int \frac{\cos x\ dx}{3\cos x-5}$
39. $\displaystyle\int \frac{dt}{12+13\cos t}$
40. $\displaystyle\int \frac{\cot x\ dx}{3+2\operatorname{sen} x}$
41. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x+\cos x}$
42. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x-\cos x}$
43. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x+\tan x}$
44. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x-\tan x}$
45. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x-\tan x}$
46. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x+\tan x}$
47. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sec x-\tan x}$
48. $\displaystyle\int \frac{dx}{\csc x-\tan x}$
49. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x\ dx}{\operatorname{sen} x+\cos x}$
50. $\displaystyle\int \frac{\cos x\ dx}{\operatorname{sen} x+\cos x}$
51. $\displaystyle\int \frac{\sec x\ dx}{\operatorname{sen} x-\cos x}$
52. $\displaystyle\int \frac{dt}{\operatorname{sen} t-2\csc t}$
53. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x\ dx}{\cos^2 x+\cos x-6}$
54. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x-\cos x}$
55. $\displaystyle\int \frac{dx}{3+2\cos x+3\operatorname{sen} x}$
56. $\displaystyle\int \frac{dx}{3\operatorname{sen} x+4\cos x}$
57. $\displaystyle\int \frac{dx}{2\operatorname{sen} x+2\cos x+3}$
58. $\displaystyle\int \frac{dx}{3\operatorname{sen} x+4\cos x+5}$
59. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cot(2x)\,(1-\cos(2x))}$
60. $\displaystyle\int \frac{\cos x\ dx}{\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen} x}$
61. $\displaystyle\int \frac{\sec x\ dx}{\sec x+\tan x-1}$
62. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x+2\tan x}$
63. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-\operatorname{sen} x+\cos x}$
64. $\displaystyle\int \frac{dx}{2+2\operatorname{sen} x+\cos x}$
65. $\displaystyle\int \frac{dt}{3\cos t-4\operatorname{sen} t}$
66. $\displaystyle\int \frac{dx}{2\csc x-\cot x+2}$
67. $\displaystyle\int \frac{dx}{4\operatorname{sen} x-3\cos x-5}$
68. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x-\cos x+2}$
69. $\displaystyle\int \frac{dx}{3\cos x+4\operatorname{sen} x}$
70. $\displaystyle\int \frac{8\ dx}{3\cos(2x)+1}$
71. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2+\cos x}\ dx$
72. $\displaystyle\int \frac{dx}{5+4\cos(2x)}$
73. $\displaystyle\int \frac{3\ dx}{2\operatorname{sen}(2x)+1}$
74. $\displaystyle\int \frac{dt}{3+\cos(2t)}$

75. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(2x)\ dx}{\cos x - \cos(2x) + 2}$ 76. $\displaystyle\int \frac{\cos x - 2\operatorname{sen} x}{3\operatorname{sen} x - \cos x + 4}\ dx$ 77. $\displaystyle\int \frac{(3\operatorname{sen} x + 1)\ dx}{\cos(2x) + \operatorname{sen}^2 x - 4}$

78. $\displaystyle\int \frac{2\cos x + 4\operatorname{sen} x - 3}{\cos^2 x + \operatorname{sen}(2x) - 1}\ dx$ 79. $\displaystyle\int \frac{3\cos(2x) - \operatorname{sen} x - 3}{\operatorname{sen}(2x) + 3}\ dx$

80. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(2x) + \cos x - 2}{\cos x - \operatorname{sen} x + 5}\ dx$

4. Calcular las siguientes integrales.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ 2. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-\sqrt{x}}$ 3. $\displaystyle\int \frac{dx}{10+\sqrt{x}}$ 4. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2}-\sqrt{x}}$

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{3+2\sqrt{x}}$ 6. $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sqrt{x}-5}$ 7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x}+1}$ 8. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+5\sqrt{3x}}$

9. $\displaystyle\int \frac{a_1\ dx}{a_2+a_3\sqrt{a_4x}}$ 10. $\displaystyle\int \frac{a_1\ dx}{a_2-a_3\sqrt{a_4x}}$ 11. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}$ 12. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-\sqrt[3]{x}}$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{8+\sqrt[3]{x}}$ 14. $\displaystyle\int \frac{dx}{\pi-\sqrt[3]{x}}$ 15. $\displaystyle\int \frac{dx}{5+2\sqrt[3]{x}}$ 16. $\displaystyle\int \frac{dx}{2-3\sqrt[3]{x}}$

17. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{4x}}$ 18. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-4\sqrt[3]{3x}}$ 19. $\displaystyle\int \frac{a_1\ dx}{a_2+a_3\sqrt[3]{a_4x}}$ 20. $\displaystyle\int \frac{a_1\ dx}{a_2-a_3\sqrt[3]{a_4x}}$

21. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt[4]{x}}$ 22. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-\sqrt[4]{x}}$ 23. $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\sqrt[4]{x}}$ 24. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5}-\sqrt[4]{x}}$

25. $\displaystyle\int \frac{dx}{3+2\sqrt[4]{x}}$ 26. $\displaystyle\int \frac{dx}{4-3\sqrt[4]{x}}$ 27. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt[4]{2x}}$ 28. $\displaystyle\int \frac{dx}{3-2\sqrt[4]{5x}}$

29. $\displaystyle\int \frac{a_1\ dx}{a_2+a_3\sqrt[4]{a_4x}}$ 30. $\displaystyle\int \frac{a_1\ dx}{a_2+a_3\sqrt[4]{a_4x}}$ 31. $\displaystyle\int \frac{dx}{\pi+\sqrt[5]{x}}$ 32. $\displaystyle\int \frac{dx}{2e-\sqrt[5]{x}}$

33. $\displaystyle\int \frac{2\ dx}{1-3\sqrt[5]{x}}$ 34. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\pi}+\sqrt[5]{2x}}$ 35. $\displaystyle\int \frac{\pi\ dx}{3+4\sqrt[5]{2x}}$ 36. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\pi}\ dx}{5-3\sqrt[5]{3x}}$

37. $\displaystyle\int \frac{2\ dx}{1+2\sqrt[6]{x}}$ 38. $\displaystyle\int \frac{5\ dx}{3+\sqrt[6]{2x}}$ 39. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{e}\ dx}{1+2\sqrt[7]{x}}$ 40. $\displaystyle\int \frac{5\ dx}{2-\pi\sqrt[7]{3x}}$

41. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\ dx$ 42. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{t}-3}{\sqrt{t}+1}\ dt$ 43. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\ dx$ 44. $\displaystyle\int \frac{3\sqrt{x}-2}{4\sqrt{x}-1}\ dx$

45. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[3]{x}+3}\ dx$ 46. $\displaystyle\int \frac{4+\sqrt[3]{x}}{2\sqrt[3]{x}-3}\ dx$ 47. $\displaystyle\int \frac{1+5\sqrt[3]{x}}{2\sqrt[3]{x}+3}\ dx$ 48. $\displaystyle\int \frac{5-2\sqrt[3]{8x}}{\sqrt[3]{x}-4}\ dx$

49. $\displaystyle\int \frac{1-2\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x}+4}\ dx$ 50. $\displaystyle\int \frac{2-\sqrt[4]{x}}{3\sqrt[4]{x}-2}\ dx$ 51. $\displaystyle\int \frac{3+2\sqrt[4]{x}}{2\sqrt[4]{x}+1}\ dx$ 52. $\displaystyle\int \frac{3\sqrt[4]{x}+5}{2-5\sqrt[4]{x}}\ dx$

53. $\displaystyle\int \frac{x\ dx}{3+\sqrt{x}}$ 54. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}\ dx$ 55. $\displaystyle\int \frac{2-\sqrt{x}}{x+3}\ dx$ 56. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x^2+x}\ dx$

57. $\displaystyle\int \frac{x^{3/2}\ dx}{x+1}$ 58. $\displaystyle\int \frac{x^{1/2}\ dx}{x+x^{1/2}}$ 59. $\displaystyle\int \frac{3-\sqrt{t}}{t+2t^{3/2}}\ dt$ 60. $\displaystyle\int \frac{(x-\sqrt{x})\ dx}{x^2+2x-3\sqrt{x}}$

61. $\displaystyle\int \frac{x\ dx}{2-\sqrt[3]{x}}$ 62. $\displaystyle\int \frac{(4+x)\ dx}{x-\sqrt[3]{x}}$ 63. $\displaystyle\int \frac{1+\sqrt[3]{t}}{t-4\sqrt[3]{t}}\ dt$ 64. $\displaystyle\int \frac{5\sqrt[3]{x}+x^{2/3}+24}{x-4\sqrt[3]{x}}\ dx$

65. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ 66. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}$ 67. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\ dx}{1+\sqrt[3]{x}}$ 68. $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$

69. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$ 70. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x^3}}$ 71. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[4]{x}\ dx}{\sqrt{x}+1}$ 72. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[4]{x}\ dx}{\sqrt{x}-2x}$

73. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}$ 74. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}\ dx}{1+\sqrt[4]{x}}$ 75. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[4]{x}+2}{1-\sqrt[3]{x}}\ dx$ 76. $\displaystyle\int \frac{\left(\sqrt[4]{x}-3\right)\ dx}{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[3]{x^2}}$

77. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^{1/3}+x^{2/3}}$ 78. $\displaystyle\int \frac{x^{1/3}\ dx}{x^{2/3}+2}$ 79. $\displaystyle\int \frac{x^{1/3}\ dx}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}$ 80. $\displaystyle\int \frac{x^{1/3}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x^3}-4\sqrt[4]{x}}\ dx$

81. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\ dx}{\sqrt[5]{x}+\sqrt{x}}$ 82. $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(\sqrt{x}-32\right)\sqrt[5]{x}}$ 83. $\displaystyle\int \frac{\left(\sqrt[5]{x}+1\right)\ dx}{\sqrt{x}+x^{4/5}}$ 84. $\displaystyle\int \frac{\left(\sqrt[5]{x}+x\right)\ dx}{\sqrt{x}-x^{4/5}}$

85. $\displaystyle\int \frac{x\ dx}{2\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}$ 86. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\ dx}{8\sqrt[4]{x}-x}$ 87. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[6]{t}\ dt}{\sqrt[3]{t}+1}$ 88. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[6]{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}+3}\ dx$

89. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[6]{x}-2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}+3\sqrt{x}+2}\ dx$ 90. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}}\ dx$ 91. $\displaystyle\int \frac{\left(x-\sqrt{x}+1\right)\ dx}{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}}$

92. $\displaystyle\int \frac{\left(e^{2x}-\sqrt{e^{3x}}\right)\ dx}{\sqrt{e^x}+2\sqrt[3]{e^x}+\sqrt[6]{e^x}}$ 93. $\displaystyle\int \frac{\left(1-3\sqrt[3]{\ln x}\right)\ dx}{x\left(2\sqrt{\ln x}-\ln^{2/3}x\right)}$ 94. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[12]{x+2}-\sqrt[6]{x+2}}{\sqrt[3]{x+2}+\sqrt{x+2}}\ dx$

95. $\displaystyle\int \frac{\left(\tan^{3/2}x-\sqrt{\tan x}-1\right)\ dx}{\left(\sqrt[4]{\tan x}+\tan^{3/4}x-2\right)\cos^2 x}$ 96. $\displaystyle\int \frac{\left(\sqrt[4]{\sec x}+2\sqrt{\sec x}\right)\ \operatorname{sen} x}{\left(3\sqrt[4]{\sec x}+4+\sqrt{\sec x}\right)\left(1-\operatorname{sen}^2 x\right)}\ dx$

97. $\displaystyle\int \frac{\left(\operatorname{sen}^2 x-2\sqrt{\operatorname{sen} x}+3\right)\ \cos x}{\operatorname{sen}^{3/4}x+\operatorname{sen}^{1/2}x+\operatorname{sen} x}\ dx$ 98. $\displaystyle\int \frac{3\cdot 5^{7x/6}+5^{2x/3}}{5^{x/2}+5^{1+x/3}+6\cdot 5^{x/6}}\ dx$

99. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{\sec^2 x-1}+\sqrt[6]{\tan x}}{\sqrt[3]{\tan x}\ \cos^2 x-\operatorname{sen}(2x)}\ dx$ 100. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(2x)+\sqrt[4]{\cos x}\operatorname{sen} x}{\sqrt{\cos x}-8\cos(2x)-8}\ dx$

5. Resuelva las siguientes integrales usando el método de integración que considere apropiado

1. $\displaystyle\int \frac{x^2\ dx}{\sqrt{x-1}}$ 2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}$ 3. $\displaystyle\int \frac{x^3\ dx}{\sqrt[3]{x^2+1}}$ 4. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-x}{x}}\ dx$

5. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-1}{x}}\ dx$ 6. $\displaystyle\int \left(1-\sqrt{x}\right)^{50} dx$ 7. $\displaystyle\int t^5\ \sqrt{t^2+4}\ dt$ 8. $\displaystyle\int \left(1-x^2\right)^{7/2} x^5\ dx$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ \sqrt{1+4x}}$ 10. $\displaystyle\int \frac{dx}{3+\sqrt{x+2}}$ 11. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x}}{1-x}\ dx$ 12. $\displaystyle\int x\left(1+x\right)^{2/3}\ dx$

13. $\displaystyle\int \frac{x\ dx}{\sqrt{2x}-\sqrt[4]{x}}$ 14. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x-2}}$ 15. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\ \sqrt{2-x^2}}$ 16. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x}-\sqrt{x+4}}$

17. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\ \sqrt{27x^2+6x-1}}$ 18. $\displaystyle\int \left(1-x^2\right)^{3/2} x^7 dx$ 19. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}\ \sqrt[3]{x}\ \left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}$

20. $\displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{2-x}{x}}\,dx$ 21. $\displaystyle\int 3^x\sqrt{1-3^x}\,dx$ 22. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x-x^3}}{x^4}\,dx$ 23. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\,\sqrt{x^2+4x-4}}$

24. $\displaystyle\int \frac{\ln\sqrt{x}-\sqrt{\ln x}}{x\left(\sqrt{\ln x}+3\right)}\,dx$ 25. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\,\sqrt{2+6x+9x^2}}$ 26. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\operatorname{sen} x}\,\cos x}{\operatorname{sen}^3 x-\operatorname{sen} x}\,dx$

27. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{w}\,dw}{\sqrt{1-\sqrt{w}}}$ 28. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{w}\,dw}{\sqrt{1-\sqrt[3]{w}}}$ 29. $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x}+1)\,dx}{(4+\sqrt[3]{x})^{5/2}}$ 30. $\displaystyle\int \frac{(x+1)\,dx}{x\,\sqrt{x^2-6x+5}}$

31. $\displaystyle\int \sqrt{e^x-1}\,dx$ 32. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$ 33. $\displaystyle\int \frac{(x-1)\,dx}{\sqrt{x^2-2x+1}}$ 34. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\,\sqrt{1+x+x^2}}$

35. $\displaystyle\int \frac{5x-6}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx$ 36. $\displaystyle\int \frac{2x^3\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$ 37. $\displaystyle\int \frac{x\,(x-5)\,dx}{\sqrt[3]{x+3}-2}$ 38. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}\,dx}{\sqrt{e^x+2}-e^x}$

39. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x}\,\left(\sqrt{2x}+9\right)}$ 40. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\,\sqrt{x^2+2x-1}}$

Respuestas: Ejercicios

1. $\operatorname{sen} x=\frac{2t}{1+t^2}$ y $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$; 2. $dx=\frac{2\,dt}{1+t^2}$; 3.1. $-\cot\left(\frac{x}{2}\right)+C$; 3.2. $-\frac{2}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)-1}+C$;

3.3. $-\frac{2}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}+C$; 3.4. $\tan\left(\frac{x}{2}\right)+C$; 3.5. $\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\sqrt{2}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)+C$; 3.6. $\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)+C$;

3.7. $\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\sqrt{3}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)+C$; 3.8. $\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)+C$; 3.9. $\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\left(3\tan\left(\frac{x}{2}\right)-1\right)\right)+C$;

3.10. $\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\left(3\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)\right)+C$; 3.11. $\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\left(2\tan\left(\frac{x}{2}\right)-1\right)\right)+C$;

3.12. $\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\left(2\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)\right)+C$; 3.13. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)-3}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{3}}\right|+C$; 3.14. $\frac{2}{3}\arctan\left(\frac{1}{3}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)+C$;

3.15. $\sqrt{3}\ln\left|\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+\sqrt{3}}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)-\sqrt{3}}\right|+C$; 3.16. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{3}}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+3}\right|+C$; 3.17. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\tan\left(\frac{t}{2}\right)+\frac{1}{2}}{\tan\left(\frac{t}{2}\right)+2}\right|+C$;

3.18. $-\frac{2}{3}\arctan\left(3\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)+C$; 3.19. $\frac{2\sqrt{5}}{15}\arctan\left(\frac{\sqrt{5}}{15}\left(7\tan\left(\frac{x}{2}\right)-2\right)\right)+C$; 3.20. $\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{4\tan\left(\frac{x}{2}\right)-\sqrt{2}}{4\tan\left(\frac{x}{2}\right)+\sqrt{2}}\right|+C$;

3.21. $-2\ln\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right|-\ln\left|\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)-1\right|+C$; 3.22. $\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|+2\ln\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right|+C$; 3.23. $\ln\left|\frac{\tan\left(\frac{t}{2}\right)+1}{\tan\left(\frac{t}{2}\right)-1}\right|+C$;

3.24. $\ln\left|\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right|+C$; 3.25. $x-\tan\left(\frac{x}{2}\right)+C$; 3.26. $x+\cot\left(\frac{x}{2}\right)+C$; 3.27. $x+\frac{2}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}+C$;

3.28. $x+\frac{2}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)-1}+C$; 3.29. $\frac{1}{2}\ln\left(\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+2\tan\left(\frac{x}{2}\right)-1\right)+\ln\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)-\frac{x}{2}+C$;

3.30. $8x+8\ln\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right|+4\ln\left|\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)-2\tan\left(\frac{x}{2}\right)-1\right|+C$; 3.31. $\frac{5x}{2}+5\ln\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right|+\frac{5}{2}\ln\left|\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+2\tan\left(\frac{x}{2}\right)-1\right|+C$;

3.32. $x-2\ln\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right|-\ln\left|\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)-2\tan\left(\frac{x}{2}\right)-1\right|+C$; 3.33. $\frac{6}{5}x+\frac{4}{5}\ln\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right|+\frac{2}{5}\ln\left|\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{2}{3}\tan\left(\frac{x}{2}\right)-1\right|+C$;

3.34. $\frac{12}{17}x-\frac{6}{17}\ln\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right|-\frac{3}{17}\ln\left|\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\tan\left(\frac{x}{2}\right)-1\right|+C$; 3.35. $x+\frac{2\sqrt{5}}{5}\ln\left|\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)-\sqrt{5}}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+\sqrt{5}}\right|+C$;

3.36. $\frac{5}{6}x+\frac{\sqrt{5}}{3}\ln\left|\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)-\sqrt{5}}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+\sqrt{5}}\right|+C$; 3.37. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)-1}\right|+\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)+2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}+C$; 3.38. $\frac{1}{3}x-\frac{5}{6}\arctan\left(2\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)+C$;

3.39. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\tan\left(\frac{t}{2}\right)+5}{\tan\left(\frac{t}{2}\right)-5}\right|+C$; 3.40. $\frac{1}{3}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|-\frac{1}{3}\ln\left(\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{4}{3}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)+C$; 3.41. $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+\sqrt{2}-1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)-\sqrt{2}-1}\right|+C$;

3.42. $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)-\sqrt{2}+1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+\sqrt{2}+1}\right|+C$; 3.43. $\frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|-\frac{1}{4}\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+C$; 3.44. $\frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|+\frac{1}{4}\cot^2\left(\frac{x}{2}\right)+C$;

3.45. $\frac{\sqrt{5}}{5}\ln\left|\frac{\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)+(\sqrt{5}-1)\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)-(\sqrt{5}+1)\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\right|+C$; 3.46. $\frac{\sqrt{5}}{5}\ln\left|\frac{\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)+(1+\sqrt{5})\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)+(1-\sqrt{5})\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\right|+C$; 3.47. $-2\ln\left|\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)-\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right|+C$;

3.48. $\left(\frac{\sqrt{5}}{10}-\frac{1}{2}\right)\ln\left|\frac{\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sqrt{5}+2}{\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sqrt{5}+2}\right|-2\ln\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right|+C$; 3.49. $\frac{1}{2}x-\ln\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right|-\frac{1}{2}\ln\left(\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)-2\tan\left(\frac{x}{2}\right)-1\right)+C$;

3.50. $\frac{1}{2}x+\ln\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right|+\frac{1}{2}\ln\left(\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)-2\tan\left(\frac{x}{2}\right)-1\right)+C$; 3.51. $\ln\left|\frac{\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+2\tan\left(\frac{x}{2}\right)-1}{\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)-1}\right|+C$;

3.52. $-\arctan\left(\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)+C$; 3.53. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+2}{\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{3}}\right|+C$; 3.54. $\ln\left|\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}\right|+C$; 3.55. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+5}\right|+C$;

3.56. $\frac{1}{5}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\right|-\frac{1}{5}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)-2\right|+C$; 3.57. $2\arctan\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+2\right)+C$; 3.58. $-\frac{2}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+3}+C$;

3.59. $\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)-1\right|+C$; 3.60. $\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|-2\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right|+C$; 3.61. $\ln\left|\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}\right|+C$;

3.62. $\frac{1}{3}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|-\frac{2}{3}\ln\left(\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+3\right)+C$; 3.63. $-\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)-1\right|+C$; 3.64. $\ln\left|\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+3}\right|+C$;

3.65. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\tan\left(\frac{t}{2}\right)+3}{\tan\left(\frac{t}{2}\right)-\frac{1}{3}}\right|+C$; 3.66. $\frac{2}{5}x+\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right|+\frac{2}{5}\ln\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right|-\frac{3}{5}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{3}\right|+C$; 3.67. $\frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)-2}+C$;

3.68. $\sqrt{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(3\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)\right)+C$; 3.69. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{3}}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)-3}\right|+C$; 3.70. $\sqrt{2}\ln\left|\frac{\tan x+\sqrt{2}}{\tan x-\sqrt{2}}\right|+C$;

3.71. $4\ln\left|\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+3\right|+8\ln\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right|-4\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+C$; 3.72. $\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{3}{2}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)+\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{3}{2}\tan^3\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{5}{6}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)+C$;

3.73. $\frac{\sqrt{15}}{10}\ln\left|\frac{\tan x-\sqrt{15}+4}{\tan x+\sqrt{15}+4}\right|+C$; 3.74. $\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\tan t\right)+C$; 3.75. $\frac{3}{5}\ln\left(\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{5}\right)+2\ln\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right|+C$;

3.76. $\frac{1}{10}\ln\left(\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{6}{5}\tan\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{3}{5}\right)+\frac{1}{5}\ln\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right|-\frac{7}{10}x+\frac{14\sqrt{6}}{15}\arctan\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\left(5\tan\left(\frac{x}{2}\right)+3\right)\right)+C$;

3.77. $\frac{3}{4}\ln\left|\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+3\right|-\frac{3}{4}\ln\left(\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{6}\arctan\left(\sqrt{3}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)-\frac{\sqrt{3}}{6}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)+C$;

3.78. $\left(\sqrt{5}+\frac{3}{2}\right)\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|+\left(\frac{3}{2}-\sqrt{5}\right)\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right|+C$; 3.79. $\frac{13}{8}\ln\left|\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)-1\right)^2+2\right|$

$+6\ln\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right|+\frac{11}{8}\ln\left|\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{9}\right|-\sqrt{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)-1\right)\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(3\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)\right)+C$;

3.80. $\frac{11}{2}x-\ln\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right|-2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\operatorname{sen}x-\frac{1}{2}\ln\left|\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{23}{16}\right|-\frac{57\sqrt{23}}{23}\arctan\left(\frac{\sqrt{23}}{23}\left(4\tan\left(\frac{x}{2}\right)-1\right)\right)+C$;

4.1. $2\sqrt{x}-2\ln\left(\sqrt{x}+1\right)+C$; 4.2. $-2\sqrt{x}-2\ln\left|\sqrt{x}-1\right|+C$; 4.3. $2\sqrt{x}-20\ln\left(\sqrt{x}+10\right)+C$;

4.4. $-2\sqrt{x}-2\sqrt{2}\ln\left|\sqrt{x}-\sqrt{2}\right|+C$; 4.5. $\sqrt{x}-\frac{3}{2}\ln\left|3+2\sqrt{x}\right|+C$; 4.6. $\sqrt{x}+\frac{5}{2}\ln\left|2\sqrt{x}-5\right|+C$;

4.7. $\sqrt{2x}-\ln\left(\sqrt{2x}+1\right)+C$; 4.8. $\frac{2}{15}\sqrt{3x}-\frac{2}{75}\ln\left(5\sqrt{3x}+1\right)+C$; 4.9. $\frac{2a_1}{a_4a_3}\sqrt{a_4x}-\frac{2a_1a_2}{a_3^2a_4}\ln\left|a_2+a_3\sqrt{a_4x}\right|+C$;

4.10. $-\frac{2a_1}{a_3a_4}\sqrt{a_4x}-\frac{2a_1a_2}{a_3^2a_4}\ln\left|a_3\sqrt{a_4x}-a_2\right|+C$; 4.11. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-3\sqrt[3]{x}+3\ln\left|\sqrt[3]{x}+1\right|+C$;

4.12. $-3\sqrt[3]{x}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-3\ln\left|\sqrt[3]{x}-1\right|+C$; 4.13. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-24\sqrt[3]{x}+192\ln\left|\sqrt[3]{x}+8\right|+C$;

4.14. $-3\pi\sqrt[3]{x}-\frac{3}{2}x^{2/3}-3\pi^2\ln\left|\sqrt[3]{x}-\pi\right|+C$; 4.15. $\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^2}-\frac{15}{4}\sqrt[3]{x}+\frac{75}{8}\ln\left|2\sqrt[3]{x}+5\right|+C$;

4.16. $-\frac{2}{3}\sqrt[3]{x}-\frac{1}{2}x^{2/3}-\frac{4}{9}\ln\left|3\sqrt[3]{x}-2\right|+C$; 4.17. $\frac{3}{8}\sqrt[3]{16x^2}-\frac{3}{4}\sqrt[3]{4x}+\frac{3}{4}\ln\left|\sqrt[3]{4x}+1\right|+C$;

4.18. $-\frac{1}{16}\sqrt[3]{3x}-\frac{1}{8}\sqrt[3]{9x^2}-\frac{1}{64}\ln\left|4\sqrt[3]{3x}-1\right|+C$; 4.19. $\frac{3a_1}{2a_3a_4}\sqrt[3]{a_4^2x^2}-\frac{3a_1a_2}{a_3^2a_4}\sqrt[3]{a_4x}+\frac{3a_1a_2^2}{a_3^3a_4}\ln\left|a_2+a_3\sqrt[3]{a_4x}\right|+C$;

4.20. $-\frac{3a_1a_2}{a_3^2a_4}\sqrt[3]{a_4x}-\frac{3a_1}{2a_3a_4}\sqrt[3]{a_4^2x^2}-\frac{3a_1a_2^2}{a_3^3a_4}\ln\left|a_3\sqrt[3]{a_4x}-a_2\right|+C$; 4.21. $4\sqrt[4]{x}-2\sqrt{x}+\frac{4}{3}x^{3/4}-4\ln\left|\sqrt[4]{x}+1\right|+C$;

4.22. $-4\sqrt[4]{x}-2\sqrt{x}-\frac{4}{3}x^{3/4}-4\ln\left|\sqrt[4]{x}-1\right|+C$; 4.23. $16\sqrt[4]{x}-4\sqrt{x}+\frac{4}{3}x^{3/4}-32\ln\left|\sqrt[4]{x}+2\right|+C$;

4.24. $-20\sqrt[4]{x}-\frac{4}{3}x^{3/4}-2\sqrt{5x}-20\sqrt{5}\ln\left|\sqrt[4]{x}-\sqrt{5}\right|+C$; 4.25. $\frac{9}{2}\sqrt[4]{x}-\frac{3}{2}\sqrt{x}+\frac{2}{3}x^{3/4}-\frac{27}{4}\ln\left|2\sqrt[4]{x}+3\right|+C$;

4.26. $-\frac{64}{27}\sqrt[4]{x}-\frac{8}{9}\sqrt{x}-\frac{4}{9}x^{3/4}-\frac{256}{81}\ln\left|4-3\sqrt[4]{x}\right|+C$; 4.27. $2\sqrt[4]{2x}-\sqrt{2x}+\frac{2}{3}\sqrt[4]{8x^3}-2\ln\left|\sqrt[4]{2x}+1\right|+C$;

4.28. $-\frac{9}{10}\sqrt[4]{5x}-\frac{3}{10}\sqrt{5x}-\frac{2}{15}\sqrt[4]{125x^3}-\frac{27}{20}\ln\left|3-2\sqrt[4]{5x}\right|+C$; 4.29. $\frac{4a_1}{3a_3a_4}\sqrt[4]{a_4^3x^3}-\frac{2a_1a_2}{a_3^2a_4}\sqrt[2]{a_4x}+\frac{4a_1a_2^2}{a_3^3a_4}\sqrt[4]{a_4x}$

$-\frac{4a_1a_2^3}{a_3^4a_4}\ln\left|a_2+a_3\sqrt[4]{a_4x}\right|+C$; 4.30. $-\frac{4a_1}{3a_3a_4}\sqrt[4]{a_4^3x^3}-\frac{2a_1a_2}{a_3^2a_4}\sqrt{a_4x}-\frac{4a_1a_2^2}{a_3^3a_4}\sqrt[4]{a_4x}-\frac{4a_1a_2^3}{a_3^4a_4}\ln\left|a_2-a_3\sqrt[4]{a_4x}\right|+C$;

4.31. $\frac{5}{4}x^{4/5}-\frac{5\pi}{3}x^{3/5}-5\pi^3\sqrt[5]{x}+\frac{5\pi^2}{2}x^{2/5}+5\pi^4\ln\left|\pi+\sqrt[5]{x}\right|+C$; 4.32. $-40e^3\sqrt[5]{x}-\frac{5}{4}x^{4/5}-10e^2x^{2/5}-\frac{10e}{3}x^{3/5}$

$-80e^4\ln\left|2e-\sqrt[5]{x}\right|+C$; 4.33. $-\frac{10}{81}\sqrt[5]{x}-\frac{5}{27}x^{2/5}-\frac{10}{27}x^{3/5}-\frac{5}{6}x^{4/5}-\frac{10}{243}\ln\left|1-3\sqrt[5]{x}\right|+C$;

4.34. $\frac{5}{8}\sqrt[5]{16x^4}-\frac{5}{2}\pi\sqrt[5]{2x}-\frac{5\sqrt[3]{\pi}}{6}\sqrt[5]{8x^3}+\frac{5\sqrt[3]{\pi^2}}{4}\sqrt[5]{4x^2}+\frac{5\sqrt[3]{\pi^4}}{2}\ln\left|\sqrt[5]{2x}+\sqrt[3]{\pi}\right|+C$; 4.35. $\frac{45\pi}{256}\sqrt[5]{4x^2}-\frac{135\pi}{512}\sqrt[5]{2x}-\frac{5\pi}{32}\sqrt[5]{8x^3}$

$+\frac{5\pi}{32}\sqrt[5]{16x^4}+\frac{405\pi}{2048}\ln\left|3+4\sqrt[5]{2x}\right|+C$; 4.36. $-\frac{5\sqrt{\pi}}{3}\left(\frac{125}{81}\sqrt[5]{3x}+\frac{25}{54}\sqrt[5]{9x^2}+\frac{5}{27}\sqrt[5]{27x^3}+\frac{1}{12}\sqrt[5]{81x^4}+\frac{625}{243}\ln\left|5-3\sqrt[5]{3x}\right|\right)+C$;

4.37. $\frac{3}{8}\sqrt[6]{x}-\frac{3}{8}\sqrt[3]{x}+\frac{1}{2}\sqrt{x}-\frac{3}{4}x^{2/3}+\frac{6}{5}x^{5/6}-\frac{3}{16}\ln\left(1+2\sqrt[6]{x}\right)+C$; 4.38. $1215\sqrt[6]{2x}-\frac{405}{2}\sqrt[3]{2x}+45\sqrt{2x}-\frac{45}{4}\sqrt[3]{4x^2}+3\sqrt[6]{32x^5}$

$-3645\ln\left(\sqrt[6]{2x}+3\right)+C$; 4.39. $\frac{7\sqrt{e}}{64}x^{2/7}-\frac{7\sqrt{e}}{64}\sqrt[7]{x}-\frac{7\sqrt{e}}{48}x^{3/7}+\frac{7\sqrt{e}}{32}x^{4/7}-\frac{7\sqrt{e}}{20}x^{5/7}+\frac{7\sqrt{e}}{12}x^{6/7}+\frac{7\sqrt{e}}{128}\ln\left|1+2\sqrt[7]{x}\right|+C$;

4.40. $-\frac{2240}{3\pi^7}\ln\left|2-\pi\sqrt[7]{3x}\right|-\frac{35}{18\pi}(3x)^{6/7}-\frac{14}{3\pi^2}(3x)^{5/7}-\frac{35}{3\pi^3}(3x)^{4/7}-\frac{280}{9\pi^4}(3x)^{3/7}-\frac{280}{3\pi^5}(3x)^{2/7}-\frac{1120}{3\pi^6}\sqrt[7]{3x}+C;$

4.41. $4\sqrt{x}+x+4\ln\left|\sqrt{x}-1\right|+C;$ 4.42. $t-8\sqrt{t}+8\ln\left(\sqrt{t}+1\right)+C;$ 4.43. $x-4\sqrt{x}+4\ln\left(\sqrt{x}+1\right)+C;$

4.44. $\frac{3}{4}x-\frac{5}{8}\sqrt{x}-\frac{5}{32}\ln\left|4\sqrt{x}-1\right|+C;$ 4.45. $45\sqrt[3]{x}-\frac{15}{2}x^{2/3}+x-135\ln\left|\sqrt[3]{x}+3\right|+C;$

4.46. $\frac{99}{8}\sqrt[3]{x}+\frac{33}{8}x^{2/3}+\frac{1}{2}x+\frac{297}{16}\ln\left|2\sqrt[3]{x}-3\right|+C;$ 4.47. $\frac{117}{8}\sqrt[3]{x}-\frac{39}{8}x^{2/3}+\frac{5}{2}x-\frac{351}{16}\ln\left|2\sqrt[3]{x}+3\right|+C;$

4.48. $-132\sqrt[3]{x}-\frac{33}{2}x^{2/3}-4x-528\ln\left|\sqrt[3]{x}-4\right|+C;$ 4.49. $576\sqrt[4]{x}-72\sqrt{x}+12x^{3/4}-2x-2304\ln\left(\sqrt[4]{x}+4\right)+C;$

4.50. $\frac{64}{81}\sqrt[4]{x}+\frac{16}{27}\sqrt{x}+\frac{16}{27}x^{3/4}-\frac{1}{3}x+\frac{128}{243}\ln\left|3\sqrt[4]{x}-2\right|+C;$ 4.51. $\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}+\frac{4}{3}x^{3/4}+x-\frac{1}{2}\ln\left(2\sqrt[4]{x}+1\right)+C;$

4.52. $-\frac{496}{625}\sqrt[4]{x}-\frac{124}{125}\sqrt{x}-\frac{124}{75}x^{3/4}-\frac{3}{5}x-\frac{992}{3125}\ln\left|2-5\sqrt[4]{x}\right|+C;$ 4.53. $\frac{1}{3}\left(3+\sqrt{x}\right)\left(2x-15\sqrt{x}+99\right)-54\ln\left(3+\sqrt{x}\right)+C;$

4.54. $2\sqrt{x}-2\arctan\left(\sqrt{x}\right)+C;$ 4.55. $2\ln|x+3|-2\sqrt{x}+2\sqrt{3}\arctan\left(\frac{1}{3}\sqrt{3x}\right)+C;$ 4.56. $2\arctan\left(\sqrt{x}\right)+C;$

4.57. $2\arctan\left(\sqrt{x}\right)-\frac{2}{3}(3-x)\sqrt{x}+C;$ 4.58. $2\sqrt{x}-2\ln\left(\sqrt{x}+1\right)+C;$ 4.59. $3\ln|t|-7\ln\left(2\sqrt{t}+1\right)+C;$

4.60. $\ln\left|\sqrt{x}+x+3\right|-\frac{2\sqrt{11}}{11}\arctan\left(\frac{\sqrt{11}}{11}\left(2\sqrt{x}+1\right)\right)+C;$ 4.61. $-48\sqrt[3]{x}-12\sqrt[3]{x^2}-4x-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^4}-\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}$

$-96\ln\left|\sqrt[3]{x}-2\right|+C;$ 4.62. $3\sqrt[3]{x}+x+\frac{15}{2}\ln\left|\sqrt[3]{x}-1\right|+\frac{9}{2}\ln\left|\sqrt[3]{x}+1\right|+C;$ 4.63. $3\sqrt[3]{t}+\frac{9}{2}\ln\left|\sqrt[3]{t}-2\right|$

$-\frac{3}{2}\ln\left|\sqrt[3]{t}+2\right|+C;$ 4.64. $15\sqrt[3]{x}+\frac{3}{2}x^{2/3}+57\ln\left|\sqrt[3]{x}-2\right|+27\ln\left|\sqrt[3]{x}+2\right|+C;$ 4.65. $6\sqrt[6]{x}-3\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}$

$-6\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+C;$ 4.66. $-6\sqrt[6]{x}-3\sqrt[3]{x}-2\sqrt{x}-6\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|+C;$ 4.67. $6\arctan\left(\sqrt[6]{x}\right)-6\sqrt[6]{x}+2\sqrt{x}-\frac{6}{5}x^{5/6}$

$+\frac{6}{7}x^{7/6}+C;$ 4.68. $24\sqrt[6]{x}-6\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}-48\ln\left(\sqrt[6]{x}+2\right)+C;$ 4.69. $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln\left(\sqrt[4]{x}+1\right)+C;$

4.70. $-4\sqrt[4]{x}-4\ln\left|\sqrt[4]{x}-1\right|+C;$ 4.71. $4\arctan\left(\sqrt[4]{x}\right)-4\sqrt[4]{x}+\frac{4}{3}x^{3/4}+C;$ 4.72. $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left(\frac{2\sqrt[4]{x}+\sqrt{2}}{2\sqrt[4]{x}-\sqrt{2}}\right)-2\sqrt[4]{x}+C;$

4.73. $6\sqrt[6]{x}-12\sqrt[12]{x}-4\sqrt[4]{x}+3\sqrt[3]{x}-\frac{12}{5}x^{5/12}+2\sqrt{x}-\frac{12}{7}x^{7/12}+\frac{3}{2}x^{2/3}+12\ln\left(\sqrt[12]{x}+1\right)+C;$ 4.74. $12\sqrt[12]{x}-3\sqrt[3]{x}$

$+\frac{12}{7}x^{7/12}-\frac{6}{5}x^{5/6}+\frac{12}{13}x^{13/12}-4\ln\left(\sqrt[12]{x}+1\right)+2\ln\left|\sqrt[6]{x}-\sqrt[12]{x}+1\right|-4\sqrt{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\left(2\sqrt[12]{x}-1\right)\right)+C;$

4.75. $-6\arctan\left(\sqrt[12]{x}\right)-4\sqrt[4]{x}-6\sqrt[3]{x}-\frac{12}{7}x^{7/12}-3x^{2/3}-\frac{12}{11}x^{11/12}-9\ln\left|\sqrt[12]{x}-1\right|-3\ln\left(\sqrt[12]{x}+1\right)-6\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+C;$

4.76. $3\sqrt[3]{x}-12\sqrt[6]{x}-8\sqrt[4]{x}-24\sqrt[12]{x}+\frac{12}{5}x^{5/12}+2\sqrt{x}-24\ln\left|\sqrt[12]{x}-1\right|+C;$ 4.77. $3\sqrt[3]{x}-3\ln\left|\sqrt[3]{x}+1\right|+C;$

4.78. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-3\ln\left(\sqrt[3]{x^2}+2\right)+C;$ 4.79. $12\sqrt[12]{x}+3\sqrt[3]{x}+\frac{12}{7}x^{7/12}+\frac{6}{5}x^{5/6}+4\ln\left|\sqrt[12]{x}-1\right|-2\ln\left|\sqrt[6]{x}+\sqrt[12]{x}+1\right|$

$-4\sqrt{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\sqrt[12]{x}+\frac{1}{2}\right)\right)+C;$ 4.80. $24\sqrt[12]{x}+12\sqrt[6]{x}+8\sqrt[4]{x}+6\sqrt[3]{x}+\frac{24}{5}x^{5/12}+4\sqrt{x}+\frac{24}{7}x^{7/12}+3x^{2/3}+\frac{8}{3}x^{3/4}$

$+\frac{12}{5}x^{5/6}+\frac{24}{11}x^{11/12}+x+24\ln\left|\sqrt[12]{x}-1\right|+C;$ 4.81. $\frac{10}{3}\ln\left(\sqrt[10]{x}+1\right)-\frac{5}{3}\ln\left|\sqrt[5]{x}-\sqrt[10]{x}+1\right|+x+\frac{5}{2}x^{2/5}-10\sqrt[10]{x}$

$-\frac{10}{7}x^{7/10}+\frac{10\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\left(2\sqrt[10]{x}-1\right)\right)+C;$ 4.82. $40\sqrt[10]{x}+\frac{10}{3}x^{3/10}+40\ln\left|\sqrt[10]{x}-2\right|-40\ln\left(\sqrt[10]{x}+2\right)+C;$

4.83. $5\sqrt[5]{x}-10\sqrt[10]{x}+\frac{5}{2}x^{2/5}+\frac{20}{3}\ln\left(\sqrt[10]{x}+1\right)-\frac{10}{3}\ln\left|\sqrt[5]{x}-\sqrt[10]{x}+1\right|+C;$ 4.84. $-\frac{10}{3}x^{3/10}-\frac{5}{2}x^{2/5}-\frac{5}{3}x^{3/5}$

$-\frac{10}{9}x^{9/10}-\frac{5}{6}x^{6/5}-\frac{20}{3}\ln\left|\sqrt[10]{x}-1\right|-\frac{5}{3}\ln\left|\sqrt[10]{x}+\sqrt[5]{x}+1\right|-10\sqrt[10]{x}+\frac{10\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\left(2\sqrt[10]{x}+1\right)\right)+C;$

4.85. $\frac{1}{16}\sqrt[4]{x}+\frac{1}{16}\sqrt{x}+\frac{1}{12}x^{3/4}+\frac{1}{8}x+\frac{1}{5}x^{5/4}+\frac{1}{3}x^{3/2}+\frac{1}{32}\ln\left|2\sqrt[4]{x}-1\right|+C;$ 4.86. $\frac{8}{3}\ln\left|\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x}+4\right|-\frac{16}{3}\ln\left|\sqrt[4]{x}-2\right|$

$-2\sqrt{x}-\frac{16\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)\right)+C;$ 4.87. $6\sqrt[6]{t}-6\arctan\left(\sqrt[6]{t}\right)-2\sqrt{t}+\frac{6}{5}t^{5/6}+C;$ 4.88. $54\sqrt[6]{x}+27\sqrt[3]{x}$

$-6\sqrt{x}-\frac{9}{2}x^{2/3}+\frac{6}{5}x^{5/6}+x-81\ln\left(\sqrt[6]{x}+3\right)-54\sqrt{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt[6]{x}\right)+C;$ 4.89. $\frac{41}{27}\sqrt[3]{x}-\frac{262}{81}\sqrt[6]{x}-\frac{10}{27}\sqrt[2]{x}+\frac{5}{6}x^{2/3}$

$-\frac{4}{5}x^{5/6}+\frac{18}{7}\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)-\frac{640}{1701}\ln\left|3\sqrt[3]{x}-2\sqrt[6]{x}+2\right|+\frac{976\sqrt{5}}{8505}\arctan\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\left(3\sqrt[6]{x}-1\right)\right)+C;$ 4.90. $60\sqrt[12]{x}+16\sqrt[4]{x}$

$+3\sqrt[3]{x}+\frac{36}{5}x^{5/12}+4\sqrt{x}+\frac{24}{7}x^{7/12}+\frac{9}{2}x^{2/3}+\frac{4}{3}x^{3/4}+\frac{12}{5}x^{5/6}+x+27\ln\left|\sqrt[12]{x}-1\right|-39\ln\left|\sqrt[12]{x}+1\right|-\frac{6}{\sqrt[12]{x}+1}+C;$

4.91. $36\sqrt[6]{x}+15\sqrt[3]{x}+8\sqrt[2]{x}+\frac{9}{2}x^{2/3}+\frac{18}{5}x^{5/6}+3x+\frac{18}{7}x^{7/12}+\frac{3}{2}x^{2/3}+\frac{2}{3}x^{2/4}+42\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|-\frac{6}{\sqrt[6]{x}-1}+C;$

4.92. $90\sqrt[6]{e^x}-39\sqrt[3]{e^x}+22\sqrt{e^x}-\frac{27}{2}e^{2x/3}+\frac{42}{5}e^{5x/6}-5e^x+\frac{18}{7}e^{7x/6}-\frac{3}{2}e^{4x/3}+\frac{2}{3}e^{3x/2}-102\ln\left(\sqrt[6]{e^x}+1\right)-\frac{12}{\sqrt[6]{e^x}+1}+C;$

4.93. $132\ln x+33\ln^2 x+12\ln^3 x+\frac{9}{2}\ln^4 x+264\ln|\ln x-2|+C;$ 4.94. $12\sqrt[4]{\tan x}-8\sqrt{\tan x}+2\tan x-\frac{4}{5}\tan^{5/4}x$

$+\frac{4}{7}\tan^{7/4}x-\ln\left|\sqrt[4]{\tan x}-1\right|+\frac{17}{2}\ln\left|\sqrt[4]{\tan x}+\sqrt{\tan x}+2\right|-\frac{69\sqrt{7}}{7}\arctan\left(\frac{\sqrt{7}}{7}\left(2\sqrt[4]{\tan x}+1\right)\right)+C;$

4.95. $12\arctan\left(\sqrt[12]{x+2}\right)-12\sqrt[12]{x+2}+6\sqrt[6]{x+2}+4\sqrt[4]{x+2}-3\sqrt[3]{x+2}-\frac{12}{5}(x+2)^{5/12}+2\sqrt{x+2}+\frac{12}{7}(x+2)^{7/12}$

$-\frac{3}{2}(x+2)^{2/3}-6\ln\left(\sqrt[6]{x+2}+1\right)+C;$ 4.96. $\frac{332\sqrt{7}}{7}\arctan\left(\frac{\sqrt{7}}{7}\left(2\sqrt[4]{\sec x}+3\right)\right)+14\sec^{1/2}x-4\sec^{1/4}x$

$-\frac{20}{3}\sec^{3/4}x+2\sec x-50\ln\left|3\sqrt[4]{\sec x}+\sqrt{\sec x}+4\right|+C;$ 4.97. $4\sqrt[4]{\operatorname{sen}x}-2\sqrt{\operatorname{sen}x}-\operatorname{sen}x+\frac{4}{5}\operatorname{sen}^{5/4}x-\frac{4}{7}\operatorname{sen}^{7/4}$

$x+\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x+6\ln\left|\sqrt[4]{\operatorname{sen}x}+\sqrt{\operatorname{sen}x}+1\right|+\frac{20\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\left(2\sqrt[4]{\operatorname{sen}x}+1\right)\right)+C;$ 4.98. $\frac{96}{\ln 5}5^{x/6}-\frac{24}{\ln 5}5^{x/3}$

$+\frac{8}{\ln 5}5^{x/2}-\frac{3}{\ln 5}5^{2x/3}+\frac{6}{5\ln 5}5^{5x/6}-\frac{192}{\ln 5}\ln\left|5^{x/6}+2\right|+C;$ 4.99. $\frac{3}{32}\arctan\left(2\sqrt[6]{\tan x}\right)-\frac{3}{8}\sqrt[6]{\tan x}-\frac{3}{32}\tan^{2/3}x$

$-\frac{27}{512}\ln\left|\sqrt[6]{\tan x}-\frac{1}{2}\right|+\frac{21}{512}\ln\left|\sqrt[6]{\tan x}+\frac{1}{2}\right|-\frac{3}{512}\ln\left|\sqrt[3]{\tan x}+\frac{1}{4}\right|+C;$ 4.100. $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{\left(\cos^{3/4}x-\frac{1}{4}\right)^3}{\cos^{3/4}x+\frac{1}{4}}\right|+C;$

5.1. $\frac{2}{15}\left(3x^2+4x+8\right)\sqrt{x-1}+C$; 5.2. $\frac{4}{3}\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)+C$; 5.3. $\frac{3}{20}\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)^2}\left(2x^2-3\right)+C$;

5.4. $\sqrt{x-x^2}-\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)+C$; 5.5. $\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{\frac{x-1}{x}}-1\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{\frac{x-1}{x}}+1\right|+\sqrt{x^2-x}+C$;

5.6. $\frac{2}{51}\left(1-\sqrt{x}\right)^{51}-\frac{1}{26}\left(1-\sqrt{x}\right)^{52}+C$; 5.7. $\left(t^2+4\right)^{3/2}\left(\frac{1}{7}t^4-\frac{16}{35}t^2+\frac{128}{105}\right)+C$;

5.8. $\frac{1}{99}\left(1-x^2\right)^{9/2}\left(4x^2-11x^4+7\right)+C$; 5.9. $\ln\left|\frac{\sqrt{1+4x}-1}{\sqrt{1+4x}+1}\right|+C$; 5.10. $2\sqrt{x+2}-6\ln\left|\sqrt{x+2}+3\right|+C$;

5.11. $\sqrt{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{2}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2}}\right|-2\sqrt{1+x}+C$; 5.12. $\frac{3}{28}\left(4x^2+x-3\right)\sqrt[3]{1+x}+C$; 5.13. $\frac{1}{2}\sqrt[4]{x}+\frac{1}{3}x^{3/4}+\frac{2}{5}x^{5/4}$
$+\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{x}+\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}+\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\sqrt{2}\sqrt[4]{x}-1\right|+C$; 5.14. $\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{x-2}-2\right)\sqrt[3]{x-2}+3\ln\left|\sqrt[3]{x-2}+1\right|+C$;

5.15. $-\frac{\sqrt{2-x^2}}{2x}+C$; 5.16. $2\sqrt{2}\left(\sqrt{x}+\ln\left|\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}\right|\right)+2\left(\sqrt{x+4}+\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right|\right)+C$;

5.17. $\frac{4}{9}\frac{\sqrt{6x+27x^2-1}}{x}-\frac{2}{9}\left(\frac{\sqrt{6x+27x^2-1}}{3x+1}\right)^3-\frac{2}{3}\frac{\sqrt{6x+27x^2-1}}{3x+1}+\frac{40}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{6x+27x^2-1}}{3x+1}\right)+C$;

5.18. $-\left(1-x^2\right)^{5/2}\left(\frac{8}{231}x^2+\frac{2}{33}x^4+\frac{1}{11}x^6+\frac{16}{1155}\right)+C$; 5.19. $3\arctan\left(\sqrt[6]{x}\right)+\frac{3\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x}+1}+C$;

5.20. $\sqrt[3]{(2-x)\,x^2}-\frac{2}{3}\ln\left|\sqrt[3]{\frac{2-x}{x}}+1\right|+\frac{1}{3}\ln\left|\left(\frac{2-x}{x}\right)^{2/3}-\sqrt[3]{\frac{2-x}{x}}+1\right|-\frac{4\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{2-x}{x}}-\frac{1}{2}\right)\right)+C$;

5.21. $-\frac{2}{3\ln 3}\left(1-3^x\right)^{3/2}+C$; 5.22. $-\frac{3}{8}\frac{\left(1-x^2\right)^{4/3}}{x^{8/3}}+C$; 5.23. $\arctan\left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\sqrt{4x+x^2-4}\right)+C$;

5.24. $15\sqrt{\ln x}-\frac{5}{2}\ln x+\frac{1}{3}\left(\ln x\right)^{3/2}-45\ln\left|\sqrt{\ln x}+3\right|+C$; 5.25. $12\left(\frac{3x+1}{\sqrt{6x+9x^2+2}+1}\right)^2-90\frac{3x+1}{\sqrt{6x+9x^2+2}+1}$
$-2\left(\frac{3x+1}{\sqrt{6x+9x^2+2}+1}\right)^3+\frac{4\left(21x+4-3\sqrt{6x+9x^2+2}\right)}{x}+6\left(17\sqrt{2}+24\right)\ln\left|\frac{3x+1}{\sqrt{6x+9x^2+2}+1}+\sqrt{2}+1\right|$
$+6\left(24-17\sqrt{2}\right)\ln\left|\frac{3x+1}{\sqrt{6x+9x^2+2}+1}-\sqrt{2}+1\right|+C$; 5.26. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{\operatorname{sen} x}-1}{\sqrt{\operatorname{sen} x}+1}\right|-\arctan\left(\sqrt{\operatorname{sen} x}\right)+C$;

5.27. $-\frac{4}{3}\left(\sqrt{w}+2\right)\sqrt{1-\sqrt{w}}+C$; 5.28. $6\sqrt{1-\sqrt[3]{w}}\left(\frac{1}{7}\left(1-\sqrt[3]{w}\right)^3-\sqrt[3]{w}-\frac{3}{5}\left(1-\sqrt[3]{w}\right)^2\right)+C$;

5.29. $\frac{6\left(8\sqrt[6]{x}-1\right)}{\sqrt{4+\sqrt[3]{x}}}+\frac{8\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(4+\sqrt[3]{x}\right)^{3/2}}+30\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-\sqrt{4+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[6]{x}+\sqrt{4+\sqrt[3]{x}}}\right|+3\sqrt{4+\sqrt[3]{x}}\sqrt[6]{x}+C$;

5.30. $\ln\left|x-3+\sqrt{x^2-6x+5}\right|+\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{2}{x-3}\right)+C$; 5.31. $2\sqrt{e^x-1}-2\arctan\left(\sqrt{e^x-1}\right)+C$;

5.32. $2\arctan\left(\sqrt{e^x-1}\right)+C$; 5.33. $x+C$; 5.34. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2\sqrt{x+x^2+1}-1+x}{x+1+2\sqrt{x+x^2+1}}\right|+C$; 5.35. $\frac{3}{2}\left(2x-3\right)\sqrt[3]{\left(x-1\right)^2}+C$;

5.36. $\frac{2}{3}\left(x^2-2\right)\sqrt{x^2+1}+C$; 5.37. $\left(2x-6-\frac{9}{2}\left(x+3\right)^{1/3}-\frac{9}{5}\left(x+3\right)^{2/3}+\frac{6}{7}\left(x+3\right)^{4/3}+\frac{3}{8}\left(x+3\right)^{5/3}\right)\left(x+3\right)+C$;

5.38. $\frac{2}{3}\ln\left|\sqrt{e^x+2}+1\right|-e^x-2\sqrt{e^x+2}-\frac{8}{3}\ln\left|\sqrt{e^x+2}-2\right|+C$; 5.39. $\ln\left|\sqrt{2x}+9\right|+C$;

5.40. $\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\sqrt{x^2+2x-1}}{x+\sqrt{2}+1}\right)+\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\left(4x+3\sqrt{2}+4\right)\sqrt{x^2+2x-1}}{\left(x+\sqrt{2}+1\right)^2}\right)+\arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+2x-1}}{x+1}\right)+C$;

Bibliografía

1. **Purcell, E. - Varberg, D. - Rigdon, S.**: "*Cálculo*". Novena Edición. PEARSON Prentice Hall.
2. **Stewart, J.**: "*Cálculo*". Grupo Editorial Iberoamericano.
3. **Thomas, George**: "*Cálculo de una variable*". 12ma edición. Pearson.
4. **Larson - Hostetler - Edwards**, "*Cálculo*". Vol. 1. Mc Graw Hill.
5. **Leithold, Louis**, "*El cálculo con geometría analítica*". Harla S.A.

Este material ha sido revisado recientemente, pero esto no garantiza que esté libre de errores, por esa razón se agradece reportar cualquier error que usted encuentre en este material enviando un mensaje al correo electrónico

farith.math@gmail.com

indicando donde se encuentra(n) dicho(s) error(es). **MUCHAS GRACIAS**.

Regla de L'Hopital.

Objetivos a cubrir

Código : MAT-CI.14

- Teorema de Rolle. Teorema de Lagrange. Teorema de Cauchy. Aplicaciones.
- Regla de L'Hopital para indeterminaciones de la forma $0/0$ e ∞/∞.
- Límites con indeterminaciones de la forma 1^∞, 0^0 e ∞^0.

Ejercicios resueltos

Ejemplo 293 *: Verificar que la función $f(x) = x - x^3$ satisface las condiciones del Teorema de Rolle en el intervalo $-1 \leq x \leq 0$. Hallar, si es posible, los valores correspondientes de c.*

Solución : Es conocido que el teorema de Rolle establece

> **Teorema 1** *: Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, diferenciable en el intervalo abierto (a, b), y con $f(a) = f(b)$, entonces, existe al menos un valor $x = c$ perteneciente al intervalo (a, b), tal que*
> $$f'(c) = 0.$$

Verificamos las hipótesis del teorema de Rolle

- Continuidad: Observemos que, la función $f(x) = x - x^3$ es continua en todo su dominio por ser un polinomio, en partícular, es continua en el intervalo $[-1, 0]$.
- Diferenciabilidad: La función f es diferenciable es todo su dominio, pues su derivada
$$f'(x) = 1 - 3x^2,$$
existe para todo $x \in \mathbb{R}$, en partícular, f es diferenciable en el intervalo abierto $(-1, 0)$.
- Por último, observemos que
$$f(-1) = (-1) - (-1)^3 = -1 - (-1) = -1 + 1 = 0,$$
mientras que
$$f(0) = (0) - (0)^3 = 0 - 0 = 0,$$
así,
$$f(-1) = f(0).$$

Por el teorema de Rolle, concluimos que existe, al menos un valor $x = c$ en $(-1, 0)$, tal que

$$f'(c) = 0, \qquad \text{es decir,} \qquad 1 - 3c^2 = 0.$$

de aquí,

$$1 - 3c^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 1 = 3c^2 \quad \Longrightarrow \quad c^2 = \frac{1}{3} \quad \Longrightarrow \quad c = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$\Longrightarrow \quad c = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Longrightarrow \quad c = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \quad \Longrightarrow \quad c = \pm\frac{\sqrt{3}}{3},$$

puesto que, $c \in (-1, 0)$, se tiene que $c = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. ★

Ejemplo 294 *: Demuestre que si f es la función cuadrática definida por $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$, el número c del Teorema del Valor Medio siempre es el punto medio del intervalo dado $[a, b]$.*

Demostración : Es conocido que el teorema del Valor Medio para derivada establece

> **Teorema 2** *: Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, diferenciable en el intervalo abierto (a, b), entonces, existe al menos un valor $x = c$ perteneciente al intervalo (a, b), tal que*
>
> $$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Verificamos las hipótesis del teorema de Rolle

- Continuidad: Observemos que, la función $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ es continua en todo su dominio por ser un polinomio, en partícular, es continua en cualquier intervalo $[a, b]$.
- Diferenciabilidad: La función f es diferenciable es todo su dominio, pues su derivada

$$f'(x) = 2\alpha x + \beta,$$

existe para todo $x \in \mathbb{R}$, en partícular, f es diferenciable en cualquier intervalo abierto (a, b).

Por el teorema del Valor Medio para derivada, concluimos que existe, al menos un valor $x = c$ en (a, b), tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c),$$

es decir,

$$\frac{\alpha b^2 + \beta b + \gamma - \left(\alpha a^2 + \beta a + \gamma\right)}{b - a} = 2\alpha c + \beta$$

Desarrollando el lado izquierdo de la igualdad, se tiene

$$\frac{\alpha b^2 + \beta b + \gamma - \left(\alpha a^2 + \beta a + \gamma\right)}{b - a} = \frac{\alpha b^2 + \beta b + \gamma - \alpha a^2 - \beta a - \gamma}{b - a} = \frac{\alpha b^2 + \beta b - \alpha a^2 - \beta a}{b - a}$$

$$= \frac{\alpha\left(b^2 - a^2\right) + \beta(b - a)}{b - a} = \frac{\alpha(b - a)(b + a) + \beta(b - a)}{b - a}$$

$$= \frac{\alpha(b - a)(b + a)}{b - a} + \frac{\beta(b - a)}{b - a} = \alpha(b + a) + \beta,$$

por lo tanto,

$$\alpha(b + a) + \beta = 2\alpha c + \beta \quad \Longrightarrow \quad \alpha(b + a) = 2\alpha c \quad \Longrightarrow \quad \frac{\alpha(b + a)}{2\alpha} = c \quad \Longrightarrow \quad c = \frac{b + a}{2}$$

★

Ejemplo 295 *: Suponga que $F'(x) = 5$ y $F(0) = 4$. Encuentre la fórmula de $F(x)$.*

Solución : Por el ejercicio 10 se tiene que

$$F(x) = Dx + C,$$

para toda $x \in \text{Dom } F$, así, como $F'(x) = 5$, entonces

$$F(x) = 5x + C,$$

puesto que, $F(0)=4$, se cumple que

$$4=F(0)=5(0)+C \qquad \Longrightarrow \qquad C=4,$$

por lo tanto,

$$F(x)=5x+4.$$

★

Ejemplo 296 : *Demuestre que* $e^p(q-p)<e^q-e^p<e^q(q-p)$, *si* $p<q$.

Demostración : Consideremos la función $f(x)=e^x$ definida en el intervalo cerrado $[p,q]$. Puesto que, la función f es continua en todo su dominio y en particular en el intervalo $[p,q]$ y es diferenciable en el intervalo abierto (p,q), entonces el Teorema del valor medio para derivada garantiza que existe un valor $c\in(p,q)$, tal que

$$\frac{e^q-e^p}{q-p}=f'(c) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{e^q-e^p}{q-p}=e^c,$$

ya que, $f'(x)=e^x$.

Por otra parte, como $c\in(p,q)$, entonces

$$p<c<q$$

y en virtud que, la función exponencial natural es una función creciente en todo su dominio, entonces, al aplicar exponencial natural en la desigualdad, la misma no cambia y se obtiene

$$e^p<e^c<e^q,$$

de aquí,

$$e^p<\frac{e^q-e^p}{q-p}<e^q,$$

como $q-p>0$, (ya que, $p<q$), al multiplicar la desigualdad por $q-p$ la misma no cambia y concluimos que

$$e^p(q-p)<e^q-e^p<e^q(q-p).$$

★

Ejemplo 297 : *Calcular el siguiente límite, si existe,* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\alpha x)}{\operatorname{sen}(\beta x)}$.

Solución : Este límite presenta una indeterminación de la forma $\dfrac{0}{0}$, aplicamos la regla de L'Hopital

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\alpha x)}{\operatorname{sen}(\beta x)}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{[\operatorname{sen}(\alpha x)]'}{[\operatorname{sen}(\beta x)]'}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha\cos(\alpha x)}{\beta\cos(\beta x)}\overset{\text{S.I.}}{=}\frac{\alpha\cos(0)}{\beta\cos(0)}=\frac{\alpha}{\beta}.$$

Luego,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\alpha x)}{\operatorname{sen}(\beta x)}=\frac{\alpha}{\beta}.$$

★

Ejemplo 298 : *Calcular el siguiente límite, si existe,* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\alpha x)-\cos(\beta x)}{x^2}$.

Solución : Este límite presenta una indeterminación de la forma $\dfrac{0}{0}$, aplicamos la regla de L'Hopital

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\alpha x)-\cos(\beta x)}{x^2}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{[\cos(\alpha x)-\cos(\beta x)]'}{[x^2]'}=\lim_{x\to 0}\frac{-\alpha\operatorname{sen}(\alpha x)+\beta\operatorname{sen}(\beta x)}{2x},$$

puesto que, el límite sigue presentando la indeterminación $\dfrac{0}{0}$, se aplica, de nuevo, la regla de L'Hopital

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\alpha\operatorname{sen}(\alpha x)+\beta\operatorname{sen}(\beta x)}{2x}\stackrel{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\left[-\alpha\operatorname{sen}(\alpha x)+\beta\operatorname{sen}(\beta x)\right]'}{[2x]'}=\lim_{x\to 0}\frac{-\alpha^2\cos(\alpha x)+\beta^2\cos(\beta x)}{2}$$

$$\stackrel{\text{S.I.}}{=}\frac{-\alpha^2\cos(0)+\beta^2\cos(0)}{2}=\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}.$$

Luego,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\alpha x)-\cos(\beta x)}{x^2}=\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}.$$

★

Ejemplo 299 *: Calcular el siguiente límite, si existe,* $\displaystyle\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sqrt{\cos(2t)}-\sqrt{\cos(3t)}}{t^2}\right)^2.$

Solución : Es conocido que, la función $f(\cdot)=(\cdot)^2$ es una función continua en todo su dominio, así,

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sqrt{\cos(2t)}-\sqrt{\cos(3t)}}{t^2}\right)^2=\left(\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{\cos(2t)}-\sqrt{\cos(3t)}}{t^2}\right)^2.$$

Resolvemos $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{\cos(2t)}-\sqrt{\cos(3t)}}{t^2}$. Observemos que este límite presenta una indeterminación de la forma $\dfrac{0}{0}$, por lo que, inicialmente, podemos aplicar la regla de L'Hopital y obtenemos

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{\cos(2t)}-\sqrt{\cos(3t)}}{t^2}\stackrel{\text{L'H}}{=}\lim_{t\to 0}\frac{\left[\sqrt{\cos(2t)}-\sqrt{\cos(3t)}\right]'}{[t^2]'}=\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{-\operatorname{sen}(2t)}{\sqrt{\cos(2t)}}+\dfrac{3\operatorname{sen}(3t)}{2\sqrt{\cos(3t)}}}{2t},$$

el cual es un límite que presenta una indeterminación de la forma $\dfrac{0}{0}$ y al aplicar, otra vez, la regla de L'Hopital se obtiene

$$\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{-\operatorname{sen}(2t)}{\sqrt{\cos(2t)}}+\dfrac{3\operatorname{sen}(3t)}{2\sqrt{\cos(3t)}}}{2t}\stackrel{\text{L'H}}{=}\lim_{t\to 0}\frac{\left[\dfrac{-\operatorname{sen}(2t)}{\sqrt{\cos(2t)}}+\dfrac{3\operatorname{sen}(3t)}{2\sqrt{\cos(3t)}}\right]'}{[2t]'}=\lim_{t\to 0}\frac{\left[\dfrac{-\operatorname{sen}(2t)}{\sqrt{\cos(2t)}}\right]'+\left[\dfrac{3\operatorname{sen}(3t)}{2\sqrt{\cos(3t)}}\right]'}{2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{\left[-\operatorname{sen}(2t)\right]'\sqrt{\cos(2t)}+\operatorname{sen}(2t)\left[\sqrt{\cos(2t)}\right]'}{\left(\sqrt{\cos(2t)}\right)^2}+\cdots}{2},$$

observe que el numerador se va transformando en una expresión muy extensa y manteniendo la indeterminación, por lo que, aplicar la regla de L'Hopital en primera instancia, no es conveniente, así, que antes de aplicarla, manipulamos algebraicamente la expresión

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{\cos(2t)}-\sqrt{\cos(3t)}}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\left(\sqrt{\cos(2t)}-\sqrt{\cos(3t)}\right)}{t^2}\frac{\left(\sqrt{\cos(2t)}+\sqrt{\cos(3t)}\right)}{\left(\sqrt{\cos(2t)}+\sqrt{\cos(3t)}\right)}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\left(\sqrt{\cos(2t)}\right)^2-\left(\sqrt{\cos(3t)}\right)^2}{t^2\left(\sqrt{\cos(2t)}+\sqrt{\cos(3t)}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos(2t)-\cos(3t)}{t^2\left(\sqrt{\cos(2t)}+\sqrt{\cos(3t)}\right)}$$

$$\overset{?}{=} \left(\lim_{t\to 0} \frac{\cos(2t) - \cos(3t)}{t^2} \right) \left(\lim_{t\to 0} \frac{1}{\sqrt{\cos(2t)} + \sqrt{\cos(3t)}} \right),$$

siempre y cuando los límites existan

$$\lim_{x\to a} f(x)\, g(x) = \left(\lim_{x\to a} f(x) \right) \left(\lim_{x\to a} g(x) \right)$$

donde

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{\sqrt{\cos(2t)} + \sqrt{\cos(3t)}} \overset{\text{S.I.}}{=} \frac{1}{\sqrt{\cos(2(0))} + \sqrt{\cos(3(0))}} = \frac{1}{\sqrt{\cos(0)} + \sqrt{\cos(0)}} = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = \frac{1}{2},$$

mientras que,

$$\lim_{t\to 0} \frac{\cos(2t) - \cos(3t)}{t^2}$$

presenta una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$, por lo que, aplicamos la regla de L'Hopital

$$\lim_{t\to 0} \frac{\cos(2t) - \cos(3t)}{t^2} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{[\cos(2t) - \cos(3t)]'}{[t^2]'} = \lim_{t\to 0} \frac{-2\,\mathrm{sen}(2t) + 3\,\mathrm{sen}(3t)}{2t},$$

observemos que el nuevo límite, de nuevo, presenta una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$, aplicamos la regla de L'Hopital

$$\lim_{t\to 0} \frac{-2\,\mathrm{sen}(2t) + 3\,\mathrm{sen}(3t)}{2t} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{[-2\,\mathrm{sen}(2t) + 3\,\mathrm{sen}(3t)]'}{[2t]'} = \lim_{t\to 0} \frac{-4\cos(2t) + 9\cos(3t)}{2}$$

$$\overset{\text{S.I.}}{=} \frac{-4\cos(2(0)) + 9\cos(3(0))}{2} = \frac{-4\cos(0) + 9\cos(0)}{2} = \frac{-4(1) + 9(1)}{2} = \frac{5}{2},$$

por lo tanto,

$$\lim_{t\to 0} \frac{\cos(2t) - \cos(3t)}{t^2} = \frac{5}{2}.$$

Finalmente,

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{\cos(2t)} - \sqrt{\cos(3t)}}{t^2} = \left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}.$$

★

Ejemplo 300 *: Calcular el siguiente límite, si existe,* $\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{2}{1-x^2} - \frac{3}{1-x^3} \right)$.

Solución : Este límite presenta una indeterminación de la forma $-\infty + \infty$, por lo tanto, **NO** podemos aplicar la regla de L'Hopital, ya que dicha regla solo es aplicable a indeterminaciones de la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

Escribimos el límite de tal manera que se transforme en un límite con una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

Así,

$$\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{2}{1-x^2} - \frac{3}{1-x^3} \right) = \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{2}{(1-x)(1+x)} - \frac{3}{(1-x)(1+x+x^2)} \right)$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{2\left(1+x+x^2\right) - 3(1+x)}{(1-x)(1+x)(1+x+x^2)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2+2x+2x^2-3-3x}{(1-x)(1+x)(1+x+x^2)}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{2x^2-1-x}{(1-x)(1+x)(1+x+x^2)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x^2-1-x}{x+1-x^3-x^4},$$

el cual es un límite que presenta una indeterminación de la forma $\dfrac{0}{0}$, aplicamos la regla de L'Hopital

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2x^2-1-x}{x+1-x^3-x^4} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{\left[2x^2-1-x\right]'}{\left[x+1-x^3-x^4\right]'} = \lim_{x\to 1^+} \frac{4x-1}{1-3x^2-4x^3}$$

$$\overset{\text{S.I.}}{=} \frac{4(1)-1}{1-3(1)^2-4(1)^3} = \frac{4-1}{1-3-4} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}.$$

Luego,

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{2}{1-x^2} - \frac{3}{1-x^3}\right) = -\frac{1}{2}.$$

★

Ejemplo 301 *: Calcular el siguiente límite, si existe,* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{\ln(\cos 3x)}{e^x - e^{-x}}\right)$.

Solución : Puesto que la función seno es una función continua, entonces

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{\ln(\cos 3x)}{e^x - e^{-x}}\right) = \operatorname{sen}\left(\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos 3x)}{e^x - e^{-x}}\right),$$

observemos que el límite argumento de la función seno es de la forma indeterminada $\dfrac{0}{0}$, por lo tanto, aplicamos la regla de L'Hopital

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos 3x)}{e^x - e^{-x}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(\ln(\cos 3x))'}{(e^x - e^{-x})'} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{-3\operatorname{sen} 3x}{\cos 3x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to 0} \frac{-3\operatorname{sen} 3x}{(e^x + e^{-x})\cos 3x} = \frac{0}{2} = 0,$$

luego,

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{\ln(\cos 3x)}{e^x - e^{-x}}\right) = \operatorname{sen}(0) = 0.$$

★

Ejemplo 302 *: Calcular el siguiente límite, si existe,* $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{5^x-3}{2^x+4}$.

Solución : Observemos que este límite es de la forma indeterminada $\dfrac{\infty}{\infty}$. Es conocido que

$$5^x = e^{x\ln 5} \qquad \text{y} \qquad 2^x = e^{x\ln 2},$$

así,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5^x-3}{2^x+4} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x\ln 5}-3}{e^{x\ln 2}+4}.$$

Aplicamos la regla de L'Hopital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{x\ln 5}-3}{e^{x\ln 2}+4} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\left(e^{x\ln 5}-3\right)'}{\left(e^{x\ln 2}+4\right)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x\ln 5}\ln 5}{e^{x\ln 2}\ln 2} = \frac{\ln 5}{\ln 2}\lim_{x\to\infty} e^{x(\ln 5 - \ln 2)} = \infty.$$

★

Ejemplo 303 *: Calcular el siguiente límite, si existe,* $\displaystyle\lim_{t\to\infty} (\ln t - \ln(3t-1))$.

Solución : Como $\ln t \to \infty$, cuando $t\to\infty$, entonces,

$$\lim_{t\to\infty} (\ln t - \ln(3t-1))$$

presenta una indeterminación de la forma $\infty - \infty$. Levantamos la indeterminación, es conocido que

$$\textbf{Propiedad II :} \qquad \ln a - \ln b = \ln\left(\frac{a}{b}\right),$$

así,

$$\ln t - \ln(3t-1) = \ln\left(\frac{t}{3t-1}\right),$$

por lo que, el límite queda

$$\lim_{t\to\infty}(\ln t - \ln(3t-1)) = \lim_{t\to\infty}\ln\left(\frac{t}{3t-1}\right),$$

puesto que, la función logaritmo neperiano es una función continua, podemos introducir el límite dentro de la aplicación logaritmo neperiano y nos queda

$$\lim_{t\to\infty}\ln\left(\frac{t}{3t-1}\right) = \ln\left(\lim_{t\to\infty}\frac{t}{3t-1}\right),$$

observemos que, el nuevo límite, $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t}{3t-1}$, es un límite de la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$, aplicando la regla de L'Hopital se tiene

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t}{3t-1} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{t\to\infty}\frac{[t]'}{[3t-1]'} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{3} = \frac{1}{3},$$

por lo tanto,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t}{3t-1} = \frac{1}{3},$$

de aquí,

$$\lim_{t\to\infty}\ln\left(\frac{t}{3t-1}\right) = \ln\left(\lim_{t\to\infty}\frac{t}{3t-1}\right) = \ln\left(\frac{1}{3}\right) = \ln 1 - \ln 3 = 0 - \ln 3.$$

Finalmente,

$$\lim_{t\to\infty}(\ln t - \ln(3t-1)) = -\ln 3.$$

★

Ejemplo 304 *: Calcular el siguiente límite, si existe,* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^x$.

Solución : Al sustituir obtenemos una inderteminación de la forma 1^∞, para levantar la indeterminación aplicamos las funciones exponencial y logaritmo natural, entonces

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{\ln\left(1-\frac{3}{x}\right)^x} = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln\left(1-\frac{3}{x}\right)}$$

como la función exponencial es continua, tenemos

$$\lim_{x\to\infty} e^{x\ln\left(1-\frac{3}{x}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\left(1-\frac{3}{x}\right)}$$

calculamos el límite,

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1-\frac{3}{x}\right)$$

el cual, presenta una indeterminación de la forma $\infty\cdot 0$, para remover esta nueva indeterminación escribimos el límite como

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1-\frac{3}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1-\dfrac{3}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}} = \frac{0}{0} \qquad \leftarrow \quad \text{Indeterminado.}$$

Aplicamos la regla de L'Hopital

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1-\dfrac{3}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\ln\left(1-\dfrac{3}{x}\right)\right)'}{\left(\dfrac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{1-\dfrac{3}{x}}\left(\dfrac{3}{x^2}\right)}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3}{1-\dfrac{3}{x}}=-3,$$

luego,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^x=e^{-3}.$$

★

Ejemplo 305 *: Calcular el siguiente límite, si existe,* $\lim\limits_{x\to\infty}(x+e^x)^{2/x}$.

Solución : Al sustituir se tiene

$$\lim_{x\to\infty}(x+e^x)^{2/x}=(\infty+e^\infty)^{2/\infty}=\infty^0 \qquad \leftarrow \quad \text{Indeterminado.}$$

Para levantar la indeterminación aplicamos exponencial y logaritmo natural

$$\lim_{x\to\infty}(x+e^x)^{2/x}=\lim_{x\to\infty}e^{\ln(x+e^x)^{2/x}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{2}{x}\ln(x+e^x)}$$

como la función exponencial es continua, entonces

$$\lim_{x\to\infty}e^{\frac{2}{x}\ln(x+e^x)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}\ln(x+e^x)},$$

calculamos el límite $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x}\ln(x+e^x)$, al sustituir

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}\ln(x+e^x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2\ln(x+e^x)}{x}=\frac{2\ln(\infty+e^\infty)}{\infty}=\frac{\infty}{\infty} \qquad \leftarrow \quad \text{Indeterminado,}$$

aplicamos la regla de L'Hopital

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2\ln(x+e^x)}{x}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{(2\ln(x+e^x))'}{(x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x+e^x}(x+e^x)'=\lim_{x\to\infty}\frac{2(1+e^x)}{x+e^x},$$

observemos que la indeterminación $\dfrac{\infty}{\infty}$, se mantiene, así, que aplicamos, de nuevo, la regla de L'Hopital

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2\ln(x+e^x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2(1+e^x)}{x+e^x}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{(2(1+e^x))'}{(x+e^x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2e^x}{1+e^x},$$

la indeterminación $\dfrac{\infty}{\infty}$, se mantiene, que aplicamos, de nuevo, la regla de L'Hopital

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2\ln(x+e^x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2e^x}{1+e^x}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{(2e^x)'}{(1+e^x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2e^x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}2=2,$$

luego,

$$\lim_{x\to\infty}(x+e^x)^{2/x}=e^2.$$

★

Ejemplo 306 *: Calcular el siguiente límite, si existe,* $\lim\limits_{x\to0^-}x^{1/\ln x}$.

Solución : Puesto que, $\ln x\to-\infty$, cuando $x\to0^-$, tenemos que el límite presenta una indeterminación de la forma 0^0, para levantar la indeterminación aplicamos las funciones exponencial natural y logaritmo natural

$$\lim_{x\to 0^-} x^{1/\ln x} = \lim_{x\to 0^-} e^{\ln x^{1/\ln x}} = \lim_{x\to 0^-} e^{\dfrac{1}{\ln x}\ln x} = \lim_{x\to 0^-} e^1 = e,$$

por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0^-} (x)^{1/\ln x} = e.$$

★

Ejemplo 307 *: Calcular el siguiente límite, si existe* $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x}{5x+3}\right)^x$.

Solución : Observemos que la expresión $\dfrac{5x}{5x+3} \to 1$, si $x\to\infty$, entonces

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x}{5x+3}\right)^x = 1^\infty \qquad \leftarrow \quad \text{Indeterminado},$$

para levantar la indeterminación aplicamos las funciones exponencial natural y logaritmo natural

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x}{5x+3}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{\ln\left(\frac{5x}{5x+3}\right)^x} = \lim_{x\to\infty} e^{x\ \ln\left(\frac{5x}{5x+3}\right)},$$

puesto que, la función exponencial natural es continua, entonces

$$\lim_{x\to\infty} e^{x\ \ln\left(\frac{5x}{5x+3}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\ \ln\left(\frac{5x}{5x+3}\right)}$$

resolvemos el último límite $\lim_{x\to\infty} x\ \ln\left(\dfrac{5x}{5x+3}\right)$, que presenta una indeterminación de la forma $\infty\cdot 0$, el cual escribimos como

$$\lim_{x\to\infty} x\ \ln\left(\frac{5x}{5x+3}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\dfrac{5x}{5x+3}\right)}{\dfrac{1}{x}}$$

y se convierte en una indeterminación $\dfrac{0}{0}$, y aplicamos la regla de L'Hopital

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\dfrac{5x}{5x+3}\right)}{\dfrac{1}{x}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\ln\left(\dfrac{5x}{5x+3}\right)\right)'}{\left(\dfrac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{\dfrac{5x}{5x+3}}\ \dfrac{(5x)'(5x+3)-(5x)(5x+3)'}{(5x+3)^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{5x+3}{5x}\ \dfrac{5(5x+3)-25x}{(5x+3)^2}}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{5x+3}{5x}\ \dfrac{15}{(5x+3)^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3}{x(5x+3)}}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-3x^2}{x(5x+3)} = \lim_{x\to\infty}\frac{-3x}{5x+3} = -\frac{3}{5},$$

con lo que,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x}{5x+3}\right)^x = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\ \ln\left(\frac{5x}{5x+3}\right)} = e^{-3/5},$$

es decir,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x}{5x+3}\right)^x = e^{-3/5}.$$

★

Ejemplo 308 *: Calcule el siguiente límite, si existe,* $\lim\limits_{\theta\to 0}(\cos(2\theta))^{1/\theta^2}$.

Solución : Hacemos la sustitución ingenua

$$\lim_{\theta\to 0}(\cos(2\theta))^{1/\theta^2} = 1^{\infty} \qquad \leftarrow \quad \text{Indeterminado},$$

para levantar la indeterminación aplicamos exponencial y logaritmo natural, entonces,

$$\lim_{\theta\to 0}(\cos(2\theta))^{1/\theta^2} = \lim_{\theta\to 0} e^{\ln(\cos(2\theta))^{1/\theta^2}} = \lim_{\theta\to 0}\ \exp\left(\frac{1}{\theta^2}\ln(\cos(2\theta))\right),$$

puesto que, la función exponencial es una función continua, entonces

$$\lim_{\theta\to 0}(\cos(2\theta))^{1/\theta^2} = \lim_{\theta\to 0}\ \exp\left(\frac{1}{\theta^2}\ln(\cos(2\theta))\right) = \exp\left(\lim_{\theta\to 0}\ \frac{\ln(\cos(2\theta))}{\theta^2}\right),$$

resolvemos el límite, al sustituir

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\ln(\cos(2\theta))}{\theta^2} = \frac{0}{0} \qquad \leftarrow \quad \text{Indeterminado},$$

aplicamos la regla de L'Hopital,

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\ln(\cos(2\theta))}{\theta^2} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{\theta\to 0}\frac{\dfrac{1}{\cos(2\theta)}(-\operatorname{sen}(2\theta))(2)}{2\theta} = \lim_{\theta\to 0}\frac{-\tan(2\theta)}{\theta} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{\theta\to 0}\frac{-2\sec^2(2\theta)}{1} = -2,$$

luego,

$$\lim_{\theta\to 0}(\cos(2\theta))^{1/\theta^2} = e^{-2}.$$

★

Ejemplo 309 *: Calcular el siguiente límite, si existe,* $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$.

Solución : Observemos que el límite presenta una indeterminación de la forma 0^0, para levantar la indeterminación aplicamos las funciones exponencial y logaritmo natural, entonces

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln x^{\operatorname{sen} x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\operatorname{sen} x \ln x}$$

como la función exponencial es continua, entonces

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\operatorname{sen} x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\operatorname{sen} x\ln x}$$

calculamos el límite,

$$\lim_{x\to 0^+}\operatorname{sen} x\ln x$$

el cual es de la forma indeterminada $0\cdot(-\infty)$, lo escribimos como

$$\lim_{x\to 0^+}\operatorname{sen} x\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\csc x} = \frac{\infty}{\infty} \qquad \leftarrow \quad \text{Indeterminado}.$$

Aplicamos la regla de L'Hopital

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{(\csc x)'} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\csc x\cot x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{-x\csc x\cot x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{-\dfrac{x}{\operatorname{sen} x}\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{-\operatorname{sen} x\operatorname{sen} x}{x\cos x} \overset{?}{=} -\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) = -(1)(0) = 0,$$

luego,

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x} = e^0 = 1.$$

★

Ejemplo 310 *: Calcular el siguiente límite, si existe,* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x}{3x+5}\right)^x$.

Solución : Observemos que cuando x tiende a infinito, entonces, $\dfrac{3x}{3x+5}\to 1$, por lo tanto,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{3x+5}\right)^x = 1^\infty \qquad \leftarrow \quad \text{Indeterminado,}$$

para levantar la indeterminación aplicamos las funciones exponencial natural y logaritmo natural

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{3x+5}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{\ln\left(\frac{3x}{3x+5}\right)^x} = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln\left(\frac{3x}{3x+5}\right)},$$

como la función exponencial natural es continua, entonces,

$$\lim_{x\to\infty} e^{x\ \ln\left(\frac{3x}{3x+5}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\left(\frac{3x}{3x+5}\right)},$$

calculamos el límite,

$$\lim_{x\to\infty} x\ \ln\left(\frac{3x}{3x+5}\right)$$

el cual es de la forma indeterminada $\infty\cdot 0$, lo escribimos como

$$\lim_{x\to\infty} x\ \ln\left(\frac{3x}{3x+5}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\dfrac{3x}{3x+5}\right)}{\dfrac{1}{x}} = \frac{0}{0} \qquad \leftarrow \quad \text{Indeterminado.}$$

Aplicamos la regla de L'Hopital

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\dfrac{3x}{3x+5}\right)}{\dfrac{1}{x}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\ln\left(\dfrac{3x}{3x+5}\right)\right)'}{\left(\dfrac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{\dfrac{3x}{3x+5}}\dfrac{3\,(3x+5)-3x\,(3)}{(3x+5)^2}}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{3x}\dfrac{9x+15-9x}{3x+5}}{-\dfrac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{3x}\dfrac{15}{(3x+5)}}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{5}{3x+5}}{-\dfrac{1}{x}} = -\lim_{x\to\infty}\frac{5x}{3x+5} \overset{\text{L'H}}{=} -\lim_{x\to\infty}\frac{(5x)'}{(3x+5)'} = -\lim_{x\to\infty}\frac{5}{3} = -\frac{5}{3},$$

con lo que,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{3x+5}\right)^x = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\ \ln\left(\frac{3x}{3x+5}\right)} = e^{-5/3},$$

luego,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{3x+5}\right)^x = e^{-5/3}.$$

★

Ejemplo 311 *: Calcular, si existe,* $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x}}\displaystyle\int_{\cos x}^{x+1}\operatorname{arcsen} u\ du$.

Solución : Observemos que este limite presenta una indeterminación de la forma $\dfrac{0}{0}$, así , aplicamos la regla de L'Hopital

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}\int_{\cos x}^{x+1}\operatorname{arcsen} u\ du \quad = \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{\left[\displaystyle\int_{\cos x}^{x+1}\operatorname{arcsen} u\ du\right]'}{\left[\sqrt{x}\right]'}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_{\cos x}^{x+1} \operatorname{arcsen} u \, du &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{arcsen}(x+1) + \operatorname{sen} x \ \operatorname{arcsen}(\cos x)}{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}} \\
&= \lim_{x\to 0^+} 2\sqrt{x} \left(\operatorname{arcsen}(x+1) + \operatorname{sen} x \ \operatorname{arcsen}(\cos x)\right) \\
&= 2\sqrt{(0)} \left(\operatorname{arcsen}((0)+1) + \operatorname{sen}(0) \ \operatorname{arcsen}(\cos(0))\right) \\
&= 2(0)\left(\operatorname{arcsen}(1) + (0) \ \operatorname{arcsen}(1)\right) = 2(0)\left(\frac{\pi}{2} + (0)\frac{\pi}{2}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Luego, el límite existe

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_{\cos x}^{x+1} \operatorname{arcsen} u \, du = 0.$$

★

Ejemplo 312 *: Calcular el siguiente límite, si existe,* $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(\int_0^x \frac{e^{t^4}}{t^2+1}\, dt + e^{x^2} \right)^{1/x}$.

Solución : Observemos que el límite presenta una indeterminación de la forma 1^∞, ya que

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\int_0^x \frac{e^{t^4}}{t^2+1}\, dt + e^{x^2} \right)^{1/x} = \left(\int_0^{(0)} \frac{e^{t^4}}{t^2+1}\, dt + e^{(0)^2} \right)^{1/\left(x\to 0^+\right)} = \left(0 + e^0\right)^{1/\left(x\to 0^+\right)} = 1^\infty$$

para levantar la indeterminación aplicamos las funciones exponencial natural y logaritmo natural

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \left(\int_0^x \frac{e^{t^4}}{t^2+1}\, dt + e^{x^2} \right)^{1/x} &= \lim_{x\to 0^+} \exp\left(\ln \left(\int_0^x \frac{e^{t^4}}{t^2+1}\, dt + e^{x^2} \right)^{1/x} \right) \\
&= \lim_{x\to 0^+} \exp\left(\frac{1}{x} \ln \left(\int_0^x \frac{e^{t^4}}{t^2+1}\, dt + e^{x^2} \right) \right)
\end{aligned}$$

como la función exponencial natural es continua, entonces

$$\lim_{x\to 0^+} \exp\left(\frac{1}{x} \ln \left(\int_0^x \frac{e^{t^4}}{t^2+1}\, dt + e^{x^2} \right) \right) = \exp\left(\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \ln \left(\int_0^x \frac{e^{t^4}}{t^2+1}\, dt + e^{x^2} \right) \right),$$

calculamos el límite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \ln \left(\int_0^x \frac{e^{t^4}}{t^2+1}\, dt + e^{x^2} \right),$$

el cual tiene presenta una indeterminación de la forma $\dfrac{0}{0}$, ya que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \ln \left(\int_0^x \frac{e^{t^4}}{t^2+1}\, dt + e^{x^2} \right) = \frac{\displaystyle\int_0^{(0)} \frac{e^{t^4}}{t^2+1}\, dt + e^{(0)^2}}{(0)} = \frac{\ln(0+1)}{0} = \frac{0}{0},$$

aplicamos la regla de L'Hopital

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \ln \left(\int_0^x \frac{e^{t^4}}{t^2+1}\, dt + e^{x^2} \right) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \left(\displaystyle\int_0^x \frac{e^{t^4}}{t^2+1}\, dt + e^{x^2} \right)}{x} \\
&\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\ln \left(\displaystyle\int_0^x \frac{e^{t^4}}{t^2+1}\, dt + e^{x^2} \right)\right)'}{(x)'}
\end{aligned}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\displaystyle\int_0^x \frac{e^{t^4}}{t^2+1}\,dt + e^{x^2}} \left(\int_0^x \frac{e^{t^4}}{t^2+1}\,dt + e^{x^2} \right)'$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\displaystyle\int_0^x \frac{e^{t^4}}{t^2+1}\,dt + e^{x^2}} \left(\frac{e^{x^4}}{x^2+1} + 2xe^{x^2} \right)$$

$$= \frac{1}{\displaystyle\int_0^{(0)} \frac{e^{t^4}}{t^2+1}\,dt + e^{(0)^2}} \left(\frac{e^{(0)^4}}{(0)^2+1} + 2\,(0)\,e^{(0)^2} \right) = \frac{1}{0+1}\left(\frac{1}{0+1}+0\right) = 1.$$

Luego,

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\int_0^x \frac{e^{t^4}}{t^2+1}\,dt + e^{x^2} \right)^{1/x} = e^1 = e.$$

★

Ejemplo 313 *: Calcular el siguiente límite, si existe,* $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \arctan\left((\cos t)^{\cot t} + \frac{2t}{\sqrt{2-2\cos t}} \right)$.

Solución : Como la función $f(\cdot) = \arctan(\cdot)$ es continua, se tiene

$$\lim_{t\to 0^+} \arctan\left((\cos t)^{\cot t} - \frac{2t}{\sqrt{2-2\cos t}} \right) = \arctan\left(\lim_{t\to 0^+} \left((\cos t)^{\cot t} - \frac{2t}{\sqrt{2-2\cos t}} \right) \right)$$

Calculamos el límite interno,

$$\lim_{t\to 0^+} \left((\cos t)^{\cot t} - \frac{2t}{\sqrt{2-2\cos t}} \right) = \lim_{t\to 0^+} (\cos t)^{\cot t} - \lim_{t\to 0^+} \frac{2t}{\sqrt{2-2\cos t}},$$

siempre y cuando los límites existan, donde $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} (\cos t)^{\cot t}$ es una indeterminación de la forma 1^∞, así,

$$\lim_{t\to 0^+} (\cos t)^{\cot t} = \lim_{t\to 0^+} e^{\ln(\cos t)^{\cot t}} = \lim_{t\to 0^+} e^{\cot t \ln(\cos t)},$$

como la función exponencial es continua, entonces

$$\lim_{t\to 0^+} e^{\cot t \ln(\cos t)} = e^{\lim\limits_{t\to 0^+} \cot t \ln(\cos t)}$$

calculamos el límite del exponente, el cual es una indeterminación de la forma $0\cdot\infty$, escribimos el límite como

$$\lim_{t\to 0^+} \cot t \ln(\cos t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln(\cos t)}{\tan t} \quad \leftarrow \quad \text{Indeterminado } \frac{0}{0},$$

aplicamos la regla de L'Hopital

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\ln(\cos t)}{\tan t} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{(\ln(\cos t))'}{(\tan t)'} = \lim_{t\to 0^+} \frac{-\tan t}{\sec^2 t} = 0,$$

luego,

$$\lim_{t\to 0^+} (\cos t)^{\cot t} = e^0 = 1$$

Por otra parte, $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \frac{2t}{\sqrt{2-2\cos t}}$ es indeterminado de la forma $\dfrac{0}{0}$, aplicamos la regla de L'Hopital

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{2t}{\sqrt{2-2\cos t}} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{(2t)'}{\left(\sqrt{2-2\cos t}\right)'} = \lim_{t\to 0^+} \frac{2}{\dfrac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{2-2\cos t}}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{2\sqrt{2-2\cos t}}{\operatorname{sen} t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{2\sqrt{2-2\cos t}}{t\,\dfrac{\operatorname{sen} t}{t}}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{2\sqrt{2-2\cos t}}{t} \frac{1}{\dfrac{\operatorname{sen} t}{t}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{2\sqrt{2-2\cos t}}{t} \frac{\lim\limits_{t\to 0^+} 1}{\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}},$$

donde, la última igualdad será cierta siempre y cuando los límites existan, entonces,

$$\lim_{t\to 0^+} 1 = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{t\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1,$$

mientras que,

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{2\sqrt{2-2\cos t}}{t} = 2\lim_{t\to 0^+} \sqrt{\frac{2-2\cos t}{t^2}} = 2\sqrt{\lim_{t\to 0^+} \frac{2-2\cos t}{t^2}},$$

la última igualdad se cumple, ya que la función $f(\cdot) = \sqrt{(\cdot)}$ es continua a la derecha del cero, entonces,

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{2-2\cos t}{t^2} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{(2-2\cos t)'}{(t^2)'} = \lim_{t\to 0^+} \frac{2\operatorname{sen} t}{2t} = 1,$$

por lo tanto,

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{2\sqrt{2-2\cos t}}{t} = 2\sqrt{1} = 2,$$

luego,

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{2t}{\sqrt{2-2\cos t}} = 2,$$

así,

$$\lim_{t\to 0^+} \arctan\left((\cos t)^{\cot t} - \frac{2t}{\sqrt{2-2\cos t}}\right) = \arctan(1-2) = -\frac{1}{4}\pi.$$

★

Ejemplo 314 : *Calcular el siguiente límite, si existe,* $\lim_{x\to 0^+} \left(x^2+1\right)^{\ln x}$.

Solución : Observemos que el límite presenta una indeterminación de la forma $1^{-\infty}$, para levantar la indeterminación aplicamos las funciones exponencial y logaritmo natural, entonces

$$\lim_{x\to 0^+} \left(x^2+1\right)^{\ln x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln\left(x^2+1\right)^{\ln x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln x \;\ln\left(x^2+1\right)}$$

como la función exponencial es continua, entonces

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\ln x\;\ln\left(x^2+1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x\;\ln\left(x^2+1\right)}$$

calculamos el límite del exponente, el cual es una indeterminación de la forma $(-\infty)\cdot 0$, escribimos el límite como

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x\;\ln\left(x^2+1\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{\dfrac{1}{\ln x}} \qquad \leftarrow \quad \text{Indeterminado } \frac{0}{0},$$

aplicamos la regla de L'Hopital

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{\dfrac{1}{\ln x}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)'}{\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{2x}{x^2+1}}{-\dfrac{1}{x\ln^2 x}} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{2x^2\ln^2 x}{x^2+1} = -2\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2\ln^2 x}{x^2+1},$$

es conocido que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)},$$

siempre y cuando los límites existan y el límite del denominador sea diferente de cero, así,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2\ln^2 x}{x^2+1} = \frac{\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\ln^2 x}{\lim\limits_{x\to 0^+} \left(x^2+1\right)},$$

donde
$$\lim_{x\to 0^+}\left(x^2+1\right)=1,$$
mientras que,
$$\lim_{x\to 0^+} x^2\ln^2 x=\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)^2=\left(\lim_{x\to 0^+} x\ln x\right)^2,$$
observemos que $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$ presenta una indeterminación de la forma $0\cdot(-\infty)$, escribimos el límite como
$$\lim_{x\to 0^+} x\ \ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \qquad \leftarrow \quad \text{Indeterminado } \frac{0}{0},$$
aplicamos la regla de L'Hopital
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{x}=-\lim_{x\to 0^+} x=0,$$
entonces
$$\lim_{x\to 0^+} x^2\ln^2 x=(0)^2=0$$
y por lo tanto,
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2\ln^2 x}{x^2+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\ln^2 x}{\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+1)}=\frac{0}{1}=0,$$
de aquí,
$$\lim_{x\to 0^+}\ln x\ \ln\left(x^2+1\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{\frac{1}{\ln x}} \overset{\text{L'H}}{=} -2\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2\ln^2 x}{x^2+1}=0.$$
luego,
$$\lim_{x\to 0^+}\left(x^2+1\right)^{\ln x}=e^0=1.$$

★

Ejercicios

1. Verificar que la función $f(x)=x-x^3$ satisface las condiciones del Teorema de Rolle en los segmentos $-1\leq x\leq 0$ y $0\leq x\leq 1$. Hallar los valores correspondientes de c.

2. La función $f(x)=\sqrt[3]{(x-2)^2}$ en los extremos del segmento $[0,4]$ toma valores iguales
$$f(0)=f(4)=\sqrt[3]{4}.$$
¿Es válido para esta función el Teorema de Rolle en el segmento $[0,4]$?

3. ¿Se cumplen las condiciones del Teorema de Rolle para la función $f(x)=\tan x$ en el segmento $[0,\pi]$?

4. Sea $f(x)=x(x+1)(x+2)(x+3)$. Demostrar que la ecuación $f'(x)=0$ tiene tres raíces reales

5. La ecuación $e^x=1+x$ evidentemente, tiene una raíz, $x=0$. Demostrar que esta ecuación no puede tener otra raíz real.

6. (a) Comprobar si se cumplen las condiciones del Teorema de Cauchy para las funciones
$$f(x)=x^2+2 \qquad \text{y} \qquad g(x)=x^3-1,$$
en el segmento $[1,2]$. Hallar $f(c)$.

(b) Idem para $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos x$, en el segmento $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

7. Demuestre que la ecuación $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ tiene a lo sumo dos raíces reales.

8. Demuestre que si f es la función cuadrática definida por $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$, el número c del Teorema del Valor Medio siempre es el punto medio del intervalo dado $[a, b]$.

9. Demuestre que si f es continua en (a, b) y $f'(x)$ existe y satisface $f' > 0$ con excepción de un punto x_0 de (a, b), entonces f es creciente en (a, b). *Sugerencia:* Considere f en cada intervalo $(a, x_0]$ y $[x_0, b)$, separadamente.

10. Demuestre que si $F'(x) = D$, para toda x de (a, b), existe una constante C, tal que, $F(x) = Dx + C$, para toda x de (a, b).

11. Suponga que $F'(x) = 5$ y $F(0) = 4$. Encuentre la fórmula de $F(x)$.

12. Demuestre que si f es una función derivable en $[a, b]$. Si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos y si $f'(x) \neq 0$ para todo x de (a, b), la ecuación $f(x) = 0$ tendrá una y sólo una solución entre a y b.

13. Demuestre que $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 1 = 0$ tiene exactamente una solución en cada intervalo $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(4, 5)$.

14. Demuestre: Sea g una función continua en $[a, b]$ y suponga que $g''(x)$ existe para toda x de (a, b). Si hay tres valores de x en $[a, b]$ para los cuales $g(x) = 0$, existe al menos un valor de x en (a, b), tal que $g''(x) = 0$.

15. Demuestre que si $|f'(x)| \leq M$, para toda x de (a, b) y si x_1 y x_2 son dos puntos de (a, b), entonces
$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq M |x_2 - x_1|.$$

16. Demuestre: Sea f una función derivable en un intervalo I. Entre ceros distintos sucesivos de f' puede haber cuando más un cero de f.

17. Una función f se llama **no decreciente** en un intervalo I si
$$x_1 < x_2 \quad \text{implica que} \quad f(x_1) \leq f(x_2),$$
para toda x_1 y x_2 de I. En forma similar, f es **no creciente** en I si
$$x_1 < x_2 \quad \text{implica que} \quad f(x_1) \geq f(x_2),$$
para toda x_1 y x_2 de I. Demuestre que si f es continua en I y si $f'(x)$ existe y satisface $f'(x) \geq 0$ en el interior de I, entonces f es no decreciente en I. De manera semejante, si $f'(x) \leq 0$, entonces f es no creciente en I.

18. Demuestre que si $g'(x) \leq h'(x)$, para toda x de (a, b), entonces
$$x_1 < x_2, \qquad \text{implica que} \qquad g(x_2) - g(x_1) \leq h(x_2) - h(x_1),$$
para toda x_1 y x_2 de (a, b). *Sugerencia:* Aplique el problema 17 con $f(x) = h(x) - g(x)$.

19. Use el Teorema del Valor Medio para demostrar que
$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+2} - \sqrt{x}\right) = 0.$$

20. Use el Teorema del Valor Medio para demostrar que
$$|\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y| \leq |x - y|.$$

21. Demuestre que $e^p (q - p) < e^q - e^p < e^q (q - p)$, si $p < q$.

22. Demuestre que $\arctan(x_2) - \arctan(x_1) \leq x_2 - x_1$.
23. Demuestre que $\dfrac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$, para $x \geq 0$.
24. Demuestre que $\ln(x) < x$, si $x > 0$.
25. Demuestre que $\dfrac{1}{9} < \sqrt{66} - 8 < \dfrac{1}{8}$.
26. Demuestre que $e^x > 1 + x$, si $x \neq 0$.
27. Demuestre que $e^x > ex$, si $x > 1$.
28. Calcule el c para el cuál la tangente a (c, c^n) es paralela a la cuerda que pasa por $(0,0)$ y (b, b^n).
29. Calcule el c para el cuál se tiene que $\ln'(c)$ es igual a la pendiente de la recta que pasa por $(1,0)$ y $(e,1)$.
30. Demuestre que $ny^{n-1}(x-y) \leq x^n - y^n \leq nx^{n-1}(x-y)$, si $0 < y \leq x$.
31. Calcular los siguientes límites

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ 2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x}$ 3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}$ 4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt[3]{x}}$

5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$ 6. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{x}$ 7. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(\pi x)}{x}$ 8. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(\alpha x)}{x}$

9. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ 10. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{x^2}$ 11. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(\pi x)}{x^2}$ 12. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(\alpha x)}{x^2}$

13. $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x-a}$ 14. $\displaystyle\lim_{t\to a} \frac{\sqrt{t}-\sqrt{a}}{t-a}$ 15. $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{x-a}$ 16. $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}{x-a}$

17. $\displaystyle\lim_{x\to \pi/2} \frac{\frac{1}{2}\pi - x}{\cos x}$ 18. $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{1-\sqrt{\cos t}}{t^2}$ 19. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x+x^2}$ 20. $\displaystyle\lim_{x\to \pi/2} \frac{\sec x + 1}{\tan x}$

21. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(2x)}$ 22. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{\operatorname{sen}(5x)}$ 23. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\operatorname{sen}(4x)}$ 24. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\alpha x)}{\operatorname{sen}(\beta x)}$

25. $\displaystyle\lim_{x\to \pi} \frac{\tan(5x)}{\operatorname{sen}(3x)}$ 26. $\displaystyle\lim_{x\to \pi} \frac{\tan(2x)}{\operatorname{sen}(7x)}$ 27. $\displaystyle\lim_{x\to \pi} \frac{\tan(3x)}{\operatorname{sen}(6x)}$ 28. $\displaystyle\lim_{x\to \pi} \frac{\tan x}{\operatorname{sen}(7x)}$

29. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}(x^2)}$ 30. $\displaystyle\lim_{t\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 t}{\sec^2(2t)}$ 31. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan(5x)}{3x}$ 32. $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \frac{3+\tan x}{1-\sec x}$

33. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$ 34. $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{2}{1-x^2} - \frac{3}{1-x^3}\right)$ 35. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{h}}{x}$

36. $\displaystyle\lim_{t\to 0} t\cot t$ 37. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\csc x}{\cot^2 x}$ 38. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\cot x}{x^2}$ 39. $\displaystyle\lim_{x\to 3} \left(\frac{6}{x^2-9} - \frac{\sqrt{x-2}}{x-3}\right)$

40. $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{3-\sqrt{x+5}}{x^2-16}$ 41. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x}$ 42. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+27}-3}{\sqrt[4]{x+16}-2}$ 43. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{sen} x}{x^3}$

44. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos(\alpha x)}-\sqrt{\cos(\beta x)}}{x^2}$ 45. $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x^2-4}+x^3-8}{\sqrt{x-2}}$ 46. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2\operatorname{sen}^2(2/x)}$

47. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x - x\operatorname{sen} x}{2-2\cos x-\operatorname{sen}^2 x}$ 48. $\displaystyle\lim_{t\to 0} \left(\frac{\sqrt{\cos(2t)}-\sqrt{\cos(3t)}}{t^2}\right)^2$ 49. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\csc x - \frac{1}{x}\right)$

50. $\displaystyle\lim_{x\to \pi} \frac{1+\cos(2x)\cos(3x)}{1+\cos x\cos(2x)}$ 51. $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 t - \tan^2 t}{t^4}$ 52. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left[\frac{\cot x}{x} - \frac{\cos x}{x^2}\right]$

53. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3-8x}{x^3 \operatorname{sen}(3/x)}$ 54. $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}} \left(\cos\left(\dfrac{t}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\dfrac{t}{2}\right)\right)\tan t$ 55. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen}^2(2x)}{x - x\cos x}$

56. $\lim\limits_{t\to\pi/4} \left(t-\dfrac{\pi}{4}\right)\tan(2t)$ 57. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{1-\operatorname{sen} x} - \dfrac{2}{\cos^2 x}\right)$ 58. $\lim\limits_{x\to0}\left(\csc^2 x - \dfrac{1}{x^2}\right)$

59. $\lim\limits_{t\to3}\left[\dfrac{\sqrt{t+1}}{t^2-9} - \dfrac{2}{t^2-9}\right]$ 60. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt[3]{3x+5}-2}{\sqrt[3]{10x+17}-3}$ 61. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{sen} x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\operatorname{sen} x - \cos x}$

62. $\lim\limits_{x\to a} (\tan x - \tan a)\cot(x-a)$ 63. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\operatorname{sen}(2x)}$ 64. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\cos x}{2x\cos x}$

65. $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$ 66. $\lim\limits_{x\to\pi/2} \tan^2 x\left[\sqrt{2\operatorname{sen}^2 x + 3\operatorname{sen} x + 4} - \sqrt{\operatorname{sen}^2 x + 6\operatorname{sen} x + 2}\right]$

67. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}-\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}{\tan x}$ 68. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x}-\sqrt[3]{\cos^2 x}}{1-\tan x}$ 69. $\lim\limits_{t\to0} \dfrac{\tan t - \operatorname{sen} t}{t^2\tan t}$

70. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{\operatorname{sen} x}$ 71. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{ax - b\operatorname{sen} x}{x+\operatorname{sen} x}$ 72. $\lim\limits_{x\to b} \dfrac{x^2-b^2}{\operatorname{sen}(x-b)}$

73. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)$ 74. $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sqrt[3]{\cos x}-\sqrt[3]{\operatorname{sen}(x/2)}}{\cos x + 1}$ 75. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{a^6-x^6}{\operatorname{sen}(x^2-a^2)}$

76. $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}}$ 77. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt{5x+4}-\sqrt{2x^2+7}}$ 78. $\lim\limits_{x\to b} \dfrac{x^2-b^2}{\operatorname{sen}(x^3-b^3)}$

79. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{3x^2-6x+3}{\cos(2(x-1))-1}$ 80. $\lim\limits_{x\to b} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{b}}{\operatorname{sen}(x-b)}$

32. Calcular los siguientes límites, si existen

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{e^{2x}}$ 2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+x}{e^x}$ 3. $\lim\limits_{h\to0} \dfrac{e^{x+h}-e^x}{h}$ 4. $\lim\limits_{u\to e^2} \dfrac{\ln^2 u - 4\ln u + 4}{\ln^2 u - 4}$

5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5^x-3}{2^x+4}$ 6. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{e^{3x}-1}$ 7. $\lim\limits_{h\to0} \dfrac{a^{x+h}-a^x}{h}$ 8. $\lim\limits_{t\to+\infty} (\ln t - \ln(3t-1))$

9. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln(x+1) - \ln(x-1))$ 10. $\lim\limits_{x\to0} \operatorname{sen}\left(\dfrac{\ln(\cos 3x)}{e^x - e^{-x}}\right)$ 11. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4\cos x + \operatorname{sen} x}{1+e^x}$

12. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\ln\left(x^2-2\right) - \ln\left(2x^2+5\right)\right)$ 13. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{2x}+6e^x-7}{e^x-1}$ 14. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{1+\ln^2 x}$

15. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(x^2+e^{-x}\right)$ 16. $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(x^2+e^{-x}\right)$ 17. $\lim\limits_{h\to0} \dfrac{\ln(x+h)-\ln x}{h}$

18. $\lim\limits_{h\to0} \dfrac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$ 19. $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln x}{1+\ln^2 x}$ 20. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{3^{2x+1}-3^{x+2}+6}{3^{x+1}-3}$

21. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x - \ln(3x-2) + 3e^{-x}}{\ln(2x^3+x-2) - \ln(x-2x^2+3x^3)}$ 22. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\operatorname{sen} x - 3\cos x + 4}{3+4^x}$

23. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right)$ 24. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\dfrac{k}{k+2}\right)$ 25. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(e^{-k}-e^{-k-1}\right)$

26. $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right)\right)$ 27. $\lim\limits_{n\to+\infty} \exp\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\dfrac{k}{k+2}\right)\right)$

28. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\sum_{k=1}^{n}\left(e^{-k}-e^{-k-1}\right)\right)$ 29. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{3^{2x+1}-3^{x+2}+6}{3^{x+2}-9}\right)$

33. Calcular los siguientes límites, si existen

1. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\left(x^3-1\right)^2}{\int_1^{x^4} \operatorname{sen}\left(1-t^2\right)\,dt}$ 2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int_x^{\operatorname{sen} x} \operatorname{arcsen} t\,dt}{\int_0^{2x} \sqrt{t^3+1}\,dt}$ 3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{\operatorname{sen} x}\int_0^x \sqrt{1+t^4}\,dt$

4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^5}\int_0^x (1-\cos t)^2\,dt$ 5. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}}\int_{\cos x}^{x+1} \operatorname{arcsen} u\,du$ 6. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \cot x\int_1^{\cos x} (2t+1)\,dt$

7. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_2^{2+h} \sqrt{1+t^3}\,dt$

34. Calcular los siguientes límites, si existen

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^x$ 3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$ 4. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$

5. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x}{5x+3}\right)^x$ 6. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x}{3x+5}\right)^x$ 7. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{ax^2}{ax^2+b}\right)^{x^2}$ 8. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{1/x}$

9. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(2e^x-1)^{1/x}$ 10. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(e^{-x}+1)^{\ln x}$ 11. $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$ 12. $\displaystyle\lim_{t\to 0^+}(\cos t)^{\cot t}$

13. $\displaystyle\lim_{t\to\pi/2}(\operatorname{sen} t)^{\cos t}$ 14. $\displaystyle\lim_{t\to 0^+}\left(t+e^{t/2}\right)^{2/t}$ 15. $\displaystyle\lim_{x\to e^+}(\ln x)^{1/(x-e)}$ 16. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{1/\ln x}$

17. $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{\ln t}{t}\right)^{1/t}$ 18. $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}(\cos(2\theta))^{1/\theta^2}$ 19. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(x+e^x)^{2/x}$ 20. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$

21. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+5}{2x^2-1}\right)^{\frac{x-2}{x^2+3}}$ 22. $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}(a^t+t)^{1/t}$ 23. $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\csc x)^x$ 24. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5}{x}\right)^{1/2x}$

25. $\displaystyle\lim_{t\to 0}(t+\cos(2t))^{\csc(3t)}$ 26. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x-a)}{\ln(x+a)}\right)^x$ 27. $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} e^{\arctan\left(1+x^4\right)^{\ln(-x)}}$

28. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(x^3+4\right)^{1/x}$ 29. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(x^2+1\right)^{\ln x}$ 30. $\displaystyle\lim_{t\to 0^+}\arctan\left((\cos t)^{\cot t}-\frac{2t}{\sqrt{2-2\cos t}}\right)$

31. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\int_0^x \frac{\cos t\,dt}{e^t-\ln(t+1)}+\frac{2-\cos x}{1+x^2}\right)^{\csc x}$ 32. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\int_0^x \frac{e^{t^4}}{t^2+1}\,dt+e^{x^2}\right)^{1/x}$

33. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\int_0^x \frac{\tan t-1}{t^2+1}\,dt-\operatorname{sen}\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)\right)^{1/x^3}$ 34. $\displaystyle\lim_{t\to 0^+}\arctan\left((\cos t)^{\cot t}+\frac{2t}{\sqrt{2-2\cos t}}\right)$

Respuestas: Ejercicios

1. $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$; 2. No; 3. No; 5.*a*. $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{17}{4}$; 5.*b*. $f\left(\arccos\left(\frac{2}{\pi}\right)\right)=\frac{1}{\pi}\sqrt{\pi^2-4}$; 10. $F(x)=5x+4$;

28. $c = n^{1/(1-n)}b$; 29. $c = e - 1$; 31.1. 1; 31.2. 1; 31.3. 0; 31.4. 0; 31.5. 0; 31.6. 0;
31.7. 0; 31.8. 0; 31.9. $\frac{1}{2}$; 31.10. 2; 31.11. $\frac{\pi^2}{2}$; 31.12. $\frac{\alpha^2}{2}$; 31.13. na^{n-1}; 31.14. $\frac{1}{2\sqrt{a}}$;
31.15. $\frac{1}{3a^{2/3}}$; 31.16. $\frac{1}{n}a^{1/n-1}$; 31.17. 1; 31.18. $\frac{1}{4}$; 31.19. 1; 31.20. 1; 31.21. $\frac{1}{2}$; 31.22. $\frac{3}{5}$;
31.23. $\frac{1}{4}\pi$; 31.24. $\frac{\alpha}{\beta}$; 31.25. $-\frac{5}{3}$; 31.26. $-\frac{2}{7}$; 31.27. $\frac{1}{2}$; 31.28. $-\frac{1}{7}$; 31.29. 1; 31.30. $+\infty$;
31.31. $\frac{5}{3}$; 31.32. -1; 31.33. $2x$; 31.34. $-\frac{1}{2}$; 31.35. $\frac{1}{2\sqrt{h}}$; 31.36. 1; 31.37. 0; 31.38. $+\infty$;
31.39. $-\frac{2}{3}$; 31.40. $-\frac{1}{48}$; 31.41. No existe; 31.42. $\frac{32}{27}$; 31.43. $\frac{1}{6}$; 31.44. $\frac{\beta^2-\alpha^2}{4}$; 31.45. 2;
31.46. $\frac{1}{4}$; 31.47. $-\infty$; 31.48. $\frac{25}{16}$; 31.49. 0; 31.50. $\frac{13}{5}$; 31.51. -1; 31.52. $\frac{1}{6}$; 31.53. 0;
31.54. $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 31.55. 8; 31.56. $-\frac{1}{2}$; 31.57. -1; 31.58. $\frac{1}{3}$; 31.59. $\frac{1}{24}$; 31.60. $\frac{27}{40}$; 31.61. $\frac{\sqrt[3]{2}}{3}$;
31.62. $\sec^2 a$; 31.63. 0; 31.64. 0; 31.65. $\sqrt{2}$; 31.66. $\frac{1}{12}$; 31.67. 1; 31.68. $-\frac{1}{3}\sqrt[3]{4}$; 31.69. $\frac{1}{2}$;
31.70. 1; 31.71. $\frac{a-b}{2}$; 31.72. $2b$; 31.73. No existe; 31.74. $\frac{1}{4}$; 31.75. $-3a^4$; 31.76. 3;
31.77. $-\frac{3}{2}$; 31.78. $\frac{2}{3b}$; 31.79. $-\frac{3}{2}$; 31.80. $\frac{1}{2\sqrt{b}}$; 32.1. 0; 32.2. 0; 32.3. e^x; 32.4. 0;
32.5. 0; 32.6. $\frac{1}{3}$; 32.7. $a^x \ln a$; 32.8. $-\ln 3$; 32.9. 0; 32.10. 0; 32.11. 0; 32.12. $-\ln 2$;
32.13. 8; 32.14. 0; 32.15. ∞; 32.16. ∞; 32.17. $\frac{1}{x}$; 32.18. $\frac{1}{x\ln a}$; 32.19. 0; 32.20. -1;
32.21. $\frac{\ln 3}{\ln 3-\ln 2}$; 32.22. 0; 32.23. $+\infty$; 32.24. $-\infty$; 32.25. e^{-1}; 32.26. $+\infty$; 32.27. 0;
32.28. -1; 32.29. e^{-1}; 33.1. $-\frac{9}{16}$; 33.2. 0; 33.3. 1; 33.4. $\frac{1}{20}$; 33.5 0; 33.6. 0;
33.7. 3; 34.1. e; 34.2. e^{-3}; 34.3. e^2; 34.4. e^a; 34.5. $e^{-3/5}$; 34.6. $e^{-5/3}$; 34.7. $e^{-b/a}$;
34.8. e; 34.9. e^2; 34.10. 1; 34.11. $e^{-1/2}$; 34.12. 1; 34.13. 1; 34.14. e^3; 34.15. $e^{1/e}$;
34.16. e; 34.17. 1; 34.18. e^{-2}; 34.19. e^2; 34.20. 1; 34.21. 1; 34.22. a; 34.23. 1;
34.24. 0; 34.25. $e^{1/3}$; 34.26. 1; 34.27. $e^{\pi/4}$; 34.28. 1; 34.29. 1; 34.30. $-\frac{\pi}{4}$; 34.31. e;
34.32. e; 34.33. 0; 34.34. $\arctan 3$;

Bibliografía

1. **Purcell, E. - Varberg, D. - Rigdon, S.**: "*Cálculo*". Novena Edición. PEARSON Prentice Hall.
2. **Stewart, J.**: "*Cálculo*". Grupo Editorial Iberoamericano.
3. **Thomas, George**: "*Cálculo de una variable*". 12ma edición. Pearson.
4. **Larson - Hostetler - Edwards**, "*Cálculo*". Vol. 1. Mc Graw Hill.
5. **Leithold, Louis**, "*El cálculo con geometría analítica*". Harla S.A.

Este material ha sido revisado recientemente, pero esto no garantiza que esté libre de errores, por esa razón se agradece reportar cualquier error que usted encuentre en este material enviando un mensaje al correo electrónico

farith.math@gmail.com

indicando donde se encuentra(n) dicho(s) error(es). **MUCHAS GRACIAS**.

Integrales impropias.

Objetivos a cubrir

Código : MAT-CI.15

- Integrales impropias: Límites de integración infinitos.
- Integrales impropias: Integrandos infinitos. Criterio de comparación.

Ejercicios resueltos

Ejemplo 315 *: Determine la convergencia o divergencia de la siguiente integral* $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x \ln(\ln x)}$

Solución : Se tiene que

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x \ln(\ln x)} = \lim_{b\to+\infty} \int_3^{b} \frac{dx}{x\ln x \ln(\ln x)}.$$

Resolvemos la integral indefinida por medio del cambio de variable

$$u = \ln(\ln x)\,; \qquad\qquad du = \frac{1}{x\ln x}\;dx,$$

y obtenemos,

$$\int \frac{dx}{x\ln x \ln(\ln x)} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\ln(\ln u)| + C,$$

así,

$$\int_3^{b} \frac{dx}{x\ln x \ln(\ln x)} = \left(\ln|\ln(\ln x)| \;\right|_3^b = \ln|\ln(\ln b)| - \ln|\ln(\ln 3)|\,,$$

luego,

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x \ln(\ln x)} = \lim_{b\to+\infty} \left(\ln|\ln(\ln b)| - \ln|\ln(\ln 3)| \right) = +\infty.$$

Por lo tanto,

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x \ln(\ln x)} \qquad \text{es divergente.}$$

★

Ejemplo 316 *: Determine la convergencia o divergencia de la siguiente integral* $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x\;dx.$

Solución : Se tiene que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x\;dx = \lim_{a\to+\infty} \int_0^{a} e^{-x}\cos x\;dx.$$

Resolvemos la integral indefinida usando integración por partes, hacemos

$$\begin{array}{lcl} u = e^{-x} & \xrightarrow{\text{Al derivar}} & du = -e^{-x}\;dx \\ dv = \cos x\;dx & \xrightarrow{\text{Al integrar}} & v = \operatorname{sen} x, \end{array}$$

La integral se transforma en

$$\int e^{-x}\cos x\;dx = e^{-x}\operatorname{sen} x + \int e^{-x}\operatorname{sen} x\;dx.$$

Para la nueva integral, integramos por partes, de nuevo, con

$$\begin{array}{lcl} u = e^{-x} & \xrightarrow{\text{Al derivar}} & du = -e^{-x}\;dx \\ dv = \operatorname{sen} x\;dx & \xrightarrow{\text{Al integrar}} & v = -\cos x, \end{array}$$

y obtenemos

$$\int e^{-x}\operatorname{sen} x\ dx = e^{-x}\left(-\cos x\right) - \int\left(-\cos x\right)\left(-e^{-x}\right)\ dx = -e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\cos x\ dx,$$

Así,

$$\int e^{-x}\cos x\ dx = e^{-x}\operatorname{sen} x + \left[-e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\cos x\ dx\right] = e^{-x}\operatorname{sen} x - e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\cos x\ dx,$$

es decir,

$$\int e^{-x}\cos x\ dx = e^{-x}\operatorname{sen} x - e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\cos x\ dx,$$

de aquí,

$$2\int e^{-x}\cos x\ dx = e^{-x}\operatorname{sen} x - e^{-x}\cos x + C.$$

la familia de primitivas es

$$\int e^{-x}\cos x\ dx = \frac{1}{2}\ e^{-x}\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\ e^{-x}\cos x + C,$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\int_0^a e^{-x}\cos x\ dx &= \left(\ \frac{1}{2}\ e^{-x}\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\ e^{-x}\cos x\ \right|_0^a \\ &= \frac{1}{2}\left[\ \left(e^{-a}\operatorname{sen}(a) - e^{-a}\cos(a)\right) - \left(e^{-0}\operatorname{sen}(0) - e^{-0}\cos(0)\right)\ \right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\ e^{-a}\operatorname{sen}(a) - e^{-a}\cos(a) + 1\ \right],\end{aligned}$$

luego,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x\ dx = \lim_{a\to+\infty}\frac{1}{2}\left[\ e^{-a}\operatorname{sen}(a) - e^{-a}\cos(a) + 1\ \right].$$

Calculamos $\lim_{a\to+\infty} e^{-a}\operatorname{sen}(a)$, es conocido que

$$-1 \leq \operatorname{sen}(a) \leq 1,$$

si dividimos por e^a, la desigualdad no cambia, ya que, e^a es siempre positiva

$$-\frac{1}{e^a} \leq \frac{\operatorname{sen}(a)}{e^a} \leq \frac{1}{e^a} \qquad \Longrightarrow \qquad -e^{-a} \leq e^{-a}\operatorname{sen}(a) \leq e^{-a},$$

si tomamos el límite cuando a tiende a infinito, se tiene

$$\lim_{a\to+\infty} e^{-a} = \lim_{a\to+\infty}\frac{1}{e^a} = 0,$$

por el Teorema del emparedado,

$$\lim_{a\to+\infty} e^{-a}\operatorname{sen}(a) = 0.$$

De manera similar, se demuestra que

$$\lim_{a\to+\infty} e^{-a}\cos(a) = 0.$$

Por lo tanto,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x\; dx = \lim_{a\to+\infty} \frac{1}{2}\left[\; e^{-a}\,\mathrm{sen}\,(a) - e^{-a}\cos(a) + 1\;\right] = \frac{1}{2},$$

es decir,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x\; dx = \frac{1}{2} \qquad \text{es convergente.}$$

★

Ejemplo 317 *: Determine la convergencia o divergencia de la siguiente integral* $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}\right)^4\, dx.$

Solución : Utilizando el criterio de comparación, es conocido que

$$-1 \le \mathrm{sen}\,x \le 1,$$

dividimos entre x, como $x\in[1,+\infty)$, se tiene que $x>0$, así, que no cambia la desigualdad

$$-\frac{1}{x} \le \frac{\mathrm{sen}\,x}{x} \le \frac{1}{x},$$

elevamos a la potencia cuarta, debemos tener presente que la expresión $(\cdot)^4$, cambia la desigualdad si los valores son negativos y la mantiene si los valores son positivos, entonces

$$-\frac{1}{x} \le \frac{\mathrm{sen}\,x}{x} \le 0 \qquad \text{y} \qquad 0 \le \frac{\mathrm{sen}\,x}{x} \le \frac{1}{x},$$

de aquí,

$$\left(-\frac{1}{x}\right)^4 \ge \left(\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}\right)^4 \ge 0^4 \qquad \text{y} \qquad 0^4 \le \left(\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}\right)^4 \le \left(\frac{1}{x}\right)^4,$$

es decir,

$$0 \le \left(\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}\right)^4 \le \frac{1}{x^4},$$

entonces, para $x\in[1,+\infty)$, tenemos

$$\int_1^{+\infty}\left(\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}\right)^4 dx \le \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^4}\, dx.$$

Determinamos la convergencia de la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^4}\, dx,$

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^4}\, dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{x^4}\, dx = \lim_{b\to+\infty}\left(\; -\frac{1}{3x^3}\;\right|_1^b = \lim_{b\to+\infty}\left(\; -\frac{1}{3b^3}+\frac{1}{3}\;\right) = \frac{1}{3} \qquad \Longrightarrow \qquad \text{converge,}$$

como,

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^4}\, dx \quad \text{es convergente} \quad \Longrightarrow \quad \int_1^{+\infty}\left(\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}\right)^4 dx \quad \text{es convergente.}$$

★

Ejemplo 318 *: Estudie la convergencia o divergencia de la siguiente integral* $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\, dx.$

Solución : Como

$$x \ge 1,$$

multiplicamos por x, la desigualdad no cambia, ya que x es positivo

$$x \ge 1 \qquad \Longrightarrow \qquad x^2 \ge x$$

multiplicamos por -1, la desigualdad cambia, ya que estamos multiplicando por un número negativo

$$x \geq 1 \quad \Longrightarrow \quad x^2 \geq x \quad \Longrightarrow \quad -x^2 \leq -x$$

aplicamos exponencial, por ser una funciń creciente, no cambia la desigualdad

$$x \geq 1 \quad \Longrightarrow \quad -x^2 \leq -x \quad \Longrightarrow \quad e^{-x^2} \leq e^{-x},$$

comparamos, entonces, con la función $g(x) = e^{-x}$

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\, dx \leq \int_1^{+\infty} e^{-x}\, dx,$$

así,

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}\, dx = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b e^{-x}\, dx = \lim_{b \to +\infty} \left(-e^{-x} \Big|_1^b \right) = \lim_{b \to +\infty} \left(-e^{-b} + e^{-1} \right) = -e^{-1},$$

por lo tanto,

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}\, dx \quad \text{converge} \quad \Longrightarrow \quad \int_1^{+\infty} e^{-x^2}\, dx \quad \text{converge.}$$

★

Ejemplo 319 *: Determine la convergencia o divergencia de la siguiente integral* $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Solución : Observemos que la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ no está definida para $x = 1$, por lo que es una integral impropia en el límite superior, por lo tanto,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{b \to 1^-} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{b \to 1^-} \left(\operatorname{arcsen} x \Big|_0^b \right) = \lim_{b \to 1^-} \left(\operatorname{arcsen}(b) - \operatorname{arcsen}(0) \right) = \frac{\pi}{2},$$

luego,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{es convergente.}$$

★

Ejemplo 320 *: Determine la convergencia o divergencia de la siguiente integral* $\displaystyle\int_0^4 \frac{3\, dx}{x^2 - 4x + 3}$.

Solución : Observemos que, el dominio de la función $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 4x + 3}$ es $\mathbb{R} - \{1, 3\}$, así, la función no está definida para $x = 1$ y $x = 3$, por lo que se nos presenta doble discontinuidad infinita dentro del intervalo de integración, por lo tanto,

$$\int_0^4 \frac{3\, dx}{x^2 - 4x + 3} = \int_0^1 \frac{3\, dx}{x^2 - 4x + 3} + \int_1^3 \frac{3\, dx}{x^2 - 4x + 3} + \int_3^4 \frac{3\, dx}{x^2 - 4x + 3},$$

denotemos por

$$I_1 = \int_0^1 \frac{3\, dx}{x^2 - 4x + 3}, \qquad I_2 = \int_1^3 \frac{3\, dx}{x^2 - 4x + 3} \qquad \text{y} \qquad I_3 = \int_3^4 \frac{3\, dx}{x^2 - 4x + 3}.$$

Encontramos la familia de primitivas de la función $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 4x + 3}$, para ello usamos el método de descomposición en fracciones simples, factorizamos el denominador

$$x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3),$$

escribimos las fracciones simples asociadas

$$\frac{3}{x^2-4x+3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{3}{x^2-4x+3}=\frac{A\,(x-3)+B\,(x-1)}{(x-1)\,(x-3)},$$

de aquí,

$$3=A\,(x-3)+B\,(x-1)\,.$$

Calculamos los valores de A y B.

- Si $x=3$, tenemos $3=A\,((3)-3)+B\,((3)-1)$ de aquí $\boxed{B=\frac{3}{2}}$

- Si $x=1$, tenemos $3=A\,((1)-3)+B\,((1)-1)$ de aquí $\boxed{A=-\frac{3}{2}}$

Entonces

$$\int\frac{3\;dx}{x^2-4x+3}=\int\frac{-3/2\;dx}{x-1}+\int\frac{3/2\;dx}{x-3}.$$

Para obtener la familia de primitivas de la primera integral del lado derecho de la igualdad, hacemos el cambio de variable

$$z=x-1; \qquad\qquad dz=dx,$$

y se tiene

$$\int\frac{-3/2\;dx}{x-1}=-\frac{3}{2}\int\frac{dz}{z}=-\frac{3}{2}\ln|z|+C=-\frac{3}{2}\ln|x-1|+C.$$

Por otra parte, para calcular la segunda integral del lado derecho de la igualdad, hacemos el cambio

$$w=x-3; \qquad\qquad dw=dx,$$

y obtenemos

$$\int\frac{3/2\;dx}{x-3}=\frac{3}{2}\int\frac{dw}{w}=\frac{3}{2}\ln|w|+C=\frac{3}{2}\ln|x-3|+C.$$

Luego, la integral indefinida es

$$\int\frac{3\;dx}{x^2-4x+3}=-\frac{3}{2}\ln|x-1|+\frac{3}{2}\ln|x-3|+C=\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|+C.$$

Estudiamos la convergencia o divergencia de I_1

$$I_1=\int_0^1\frac{3\;dx}{x^2-4x+3}=\lim_{b\to1^-}\int_0^b\frac{3\;dx}{x^2-4x+3}=\lim_{b\to1^-}\left(\left.\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|\;\right|_0^b\right.$$

$$=\frac{3}{2}\lim_{b\to1^-}\left(\ln\left|\frac{b-3}{b-1}\right|-\ln\left|\frac{0-3}{0-1}\right|\right)=+\infty,$$

con lo que concluimos, que I_1 es divergente, por lo tanto,

$$\int_0^4\frac{3\;dx}{x^2-4x+3}\quad\text{es divergente.}$$

★

Ejemplo 321 *: Determine la convergencia o divergencia de la siguiente integral* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)}$.

Solución : Observemos que, la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}$ no está definida para $x = 0$, por lo que, se nos presenta una integral impropia en el límite superior y en el límite inferior, por lo tanto,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)} = \int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)},$$

denotemos por

$$I_1 = \int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)} \qquad \text{y} \qquad I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)}.$$

En primer lugar, encontremos la familia de primitivas de la función f, para ello, hacemos el cambio de variable

$$u = \sqrt{x} \quad \Longrightarrow \quad x = u^2, \qquad\qquad du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \quad \Longrightarrow \quad 2\ du = \frac{dx}{\sqrt{x}},$$

la integral indefinida queda

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)} = \int \frac{2\ du}{u^2+1} = 2\arctan u + C = 2\arctan\left(\sqrt{x}\right) + C.$$

Estudiemos la convergencia o divergencia de I_1

$$I_1 = \int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)} = \lim_{a\to 0^+} \int_a^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)} = \lim_{a\to 0^+} \left(2\arctan\left(\sqrt{x}\right) \Bigg|_a^1 \right.$$

$$= 2\lim_{a\to 0^+} \left(\arctan\left(\sqrt{1}\right) - \arctan\left(\sqrt{a}\right) \right) = 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Estudiemos la convergencia o divergencia de I_2

$$I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)} = \lim_{b\to +\infty} \int_1^{b} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)} = \lim_{b\to +\infty} \left(2\arctan\left(\sqrt{x}\right) \Bigg|_1^b \right.$$

$$= 2\lim_{b\to +\infty} \left(\arctan\left(\sqrt{b}\right) - \arctan\left(\sqrt{1}\right) \right) = 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2},$$

así,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Por lo tanto,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)} = \pi \quad \text{es convergente.}$$

★

Ejemplo 322 *: Encuentre b, tal que,* $\displaystyle\int_0^{b} \ln x\ dx = 0$.

Solución : Observemos que, la función $f(x) = \ln x$ no está definida para $x = 0$, por lo que, es una integral impropia en el límite inferior, por lo tanto,

$$\int_0^{b} \ln x\ dx = \lim_{a\to 0^+} \int_a^{b} \ln x\ dx,$$

la integral de $y = \ln x$ se obtiene por integración por partes, hacemos

$$u = \ln x \quad \xrightarrow{\text{Al derivar}} \quad du = \frac{dx}{x}$$
$$dv = dx \quad \xrightarrow{\text{Al integrar}} \quad v = x.$$

La integral se transforma en

$$\int \ln x \; dx = x \ln x - \int x \; \frac{1}{x} \; dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C = x (\ln x - 1) + C,$$

entonces,

$$\int_0^b \ln x \; dx = \lim_{a \to 0^+} \int_a^b \ln x \; dx = \lim_{a \to 0^+} \left(\; x (\ln x - 1) \; \right|_a^b = \lim_{a \to 0^+} \left(\; b (\ln b - 1) - a (\ln a - 1) \; \right)$$
$$= b (\ln b - 1) - \lim_{a \to 0^+} \left(\; a (\ln a - 1) \; \right),$$

calculamos el límite cuando a tiende a 0^+

$$\lim_{a \to 0^+} a (\ln a - 1) = \lim_{a \to 0^+} \frac{\ln a - 1}{\frac{1}{a}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{a \to 0^+} \frac{(\ln a - 1)'}{\left(\frac{1}{a}\right)'} = \lim_{a \to 0^+} \frac{\frac{1}{a}}{-\frac{1}{a^2}} = - \lim_{a \to 0^+} a = 0,$$

así,

$$0 = \int_0^b \ln x \; dx = b (\ln b - 1),$$

es decir,

$$b (\ln b - 1) \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} b = 0. \quad \leftarrow \quad \text{Lo cual no puede ser.} \\ \\ \ln b - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \ln b = 1 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{b = e.} \end{cases}$$

Por lo tanto, $b = e$. ★

Ejemplo 323 *: Demuestre que* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ *diverge si* $0 < p \leq 1$ *y converge si* $p > 1$.

Demostración : Calculamos la integral indefinida, para el caso $p \neq 1$.

$$\int \frac{dx}{x^p} = \int x^{-p} \; dx = \frac{x^{1-p}}{1-p} + C,$$

así,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \to +\infty} \left(\; \frac{x^{1-p}}{1-p} \; \right|_1^b = \lim_{b \to +\infty} \left(\; \frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \; \right) = \lim_{b \to +\infty} \left(\; \frac{b^{1-p}}{1-p} \; \right) - \frac{1}{1-p},$$

entonces, si $p > 1$, se tiene que, $1 - p > 0$, con lo que

$$\lim_{b \to +\infty} \left(\; \frac{b^{1-p}}{1-p} \; \right) = \lim_{b \to +\infty} \left(\; \frac{1}{1-p} \frac{1}{b^{p-1}} \; \right) = 0,$$

por lo tanto,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = -\frac{1}{1-p} \qquad \text{es convergente si } p > 1,$$

si $p < 1$, entonces, $1 - p > 0$, con lo que

$$\lim_{b \to +\infty} \left(\frac{b^{1-p}}{1-p} \right) = +\infty,$$

por lo tanto,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = -\frac{1}{1-p} \qquad \text{es divergente si } p < 1.$$

Si $p = 1$, entonces,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \to +\infty} \left(\ln|x| \Big|_1^b \right) = \lim_{b \to +\infty} \left(\ln|b| - \ln|1| \right) = +\infty,$$

por lo tanto,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = -\frac{1}{1-p} \qquad \text{es divergente, si } p = 1.$$

★

Ejercicios

1. Estudie la convergencia o divergencia de las siguientes integrales

1. $\int_1^{+\infty} e^x \, dx$	2. $\int_3^{+\infty} \frac{x \, dx}{\sqrt{9+x^2}}$	3. $\int_0^3 \frac{x \, dx}{\sqrt{9-x^2}}$	4. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$
5. $\int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{x^5}$	6. $\int_{-1}^{27} x^{-2/3} \, dx$	7. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2+4}}$	8. $\int_2^{+\infty} \frac{x \, dx}{1+x^2}$
9. $\int_{-\infty}^0 e^{3x} \, dx$	10. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$	11. $\int_4^{+\infty} x e^{-x^2} \, dx$	12. $\int_0^{\pi/4} \tan 2x \, dx$
13. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{0.99}}$	14. $\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{9-x}}$	15. $\int_2^{+\infty} \frac{x \, dx}{(1+x^2)^2}$	16. $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(2x-1)^3}$
17. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{e^{\lvert x \rvert}} \, dx$	18. $\int_0^{+\infty} x e^{-x} \, dx$	19. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \, dx}{(x^2+4)^2}$	20. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(1-x)^{2/3}}$
21. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1.01}}$	22. $\int_0^1 \frac{\ln x}{x} \, dx$	23. $\int_3^7 \frac{dx}{\sqrt{x-3}}$	24. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
25. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{3x}}$	26. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} \, dx$	27. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x (\ln x)^2}$	28. $\int_2^4 \frac{dx}{(3-x)^{2/3}}$
29. $\int_0^3 \frac{x \, dx}{9-x^2}$	30. $\int_{1/2}^{+\infty} \frac{x+1}{x^2} \, dx$	31. $\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^{1/3}}$	32. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x+1)^{4/3}}$
33. $\int_{-3}^2 \frac{dx}{x^4}$	34. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x (\ln x)^{1/2}}$	35. $\int_0^{\pi/2} \csc x \, dx$	36. $\int_0^2 \frac{3 \, dx}{x^2+x-2}$

37. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1-x}$ 38. $\displaystyle\int_{3}^{5} \frac{dx}{(4-x)^{2/3}}$ 39. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\ dx}{1+x^4}$ 40. $\displaystyle\int_{-3}^{0} \frac{x\ dx}{(x^2-4)^{2/3}}$

41. $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$ 42. $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x^4}$ 43. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\ dx}{x^2+1}$ 44. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-x} \operatorname{sen} x\ dx$

45. $\displaystyle\int_{+\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ 46. $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} xe^{-x^2}\ dx$ 47. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^3-x^2}$ 48. $\displaystyle\int_{0}^{3} \frac{dx}{\sqrt{|1-x|}}$

2. Encuentre b tal que $\displaystyle\int_0^b \ln x\ dx = 0$.

3. Demuestre que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ diverge si $0 < p \leq 1$ y converge si $p > 1$.

4. Demostrar que la integral $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p (\ln x)^q}$
   (a) es convergente si $p > 1$ y $q \geq 0$.
   (b) es convergente si $p = 1$ y $q > 1$.
   (c) es divergente si $p = 1$ y $q \leq 1$.
   (d) es divergente para todo q si $p < 1$.

5. Evalúe $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{dx}{4-x^2}$ ó demuestre que diverge.

6. Encuentre el área de la región comprendida entre las curvas $y = \dfrac{1}{x}$ y $y = \dfrac{1}{x^3+x}$ para $0 < x \leq 1$.

7. Encuentre el área de la región bajo la curva $y = \dfrac{2}{4x^2-1}$ a la derecha de $x = 1$.

8. Encuentre el área de la región comprendida entre las curvas $y = (x-8)^{-2/3}$ y $y = 0$ para $0 \leq x < 8$.

9. Sea R la región del primer cuadrante bajo la curva $y = x^{-2/3}$ y a la izquierda de $x = 1$. Demuestre que el área de R es finita y encuentre su valor.

10. Encuentre el volumen del sólido generado por la rotación de la región dada por $x = \dfrac{2}{y}$, $y = 6$, $x = 0$ alrededor del eje y.

11. Encuentre el volumen del sólido generado por la rotación de la región dada por $y = \arctan x$, $x = 0$ con $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ alrededor del eje y.

12. Encuentre el volumen del sólido generado por la rotación de la región dada por $y = e^{1/x}$, $x = 1$, y los ejes coordenados, alrededor del eje x.

13. Encuentre el volumen del sólido generado por la rotación de la región dada por $y = \sec x$, con $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, alrededor de la recta $y = -1$.

14. Use una prueba de comparación para decidir si convergen o divergen las siguientes integrales

    1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^6+x}}$ 2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{e^{2x}}\ dx$ 3. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{x \operatorname{sen} x}$ 4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\ dx$

    5. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\ dx$ 6. $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\ dx$ 7. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x^3\ dx}{x^5+2}$ 8. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\ dx$

9. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3}\, dx$ 10. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x+e^{2x}}$ 11. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ 12. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4\left(1+x^4\right)}$

13. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4+x^3+x^2}$ 14. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^6 dx$ 15. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^2 dx$

Respuestas: Ejercicios

1.1. Div.; 1.2. Div.; 1.3. 3 Conv.; 1.4. $\frac{\pi}{2}$ Conv.; 1.5. $-\frac{1}{64}$ Conv.; 1.6. 12 Conv.; 1.7. Div.; 1.8. Div.; 1.9. $\frac{1}{3}$ Conv.; 1.10. Div.; 1.11. $\frac{1}{2}e^{-16}$ Conv.; 1.12. Div.; 1.13. Div.; 1.14. 6 Conv.; 1.15. $\frac{1}{10}$ Conv.; 1.16. $-\frac{1}{4}$ Conv.; 1.17. 0 Conv.; 1.18. 1 Conv.; 1.19. 0 Conv.; 1.20. Div.; 1.21. 100 Conv.; 1.22. Div.; 1.23. 4 Conv.; 1.24. $\frac{\pi}{2}$ Conv.; 1.25. Div.; 1.26. Div.; 1.27. $\frac{1}{\ln 2}$ Conv.; 1.28. 6 Conv.; 1.29. Div.; 1.30. 4 Conv.; 1.31. $\frac{3}{2}$ Conv.; 1.32. Div.; 1.33. Div.; 1.34. Div.; 1.35. Div.; 1.36. Div.; 1.37. Div.; 1.38. 6 Conv.; 1.39. 0 Conv.; 1.40. $\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{13}\right)$ Conv.; 1.41. $2\sqrt{2}$ Conv.; 1.42. $1-\frac{\pi}{4}$ Conv.; 1.43. Div.; 1.44. $\frac{1}{2}$ Conv.; 1.45. π Conv.; 1.46. $\frac{1}{2e}$ Conv.; 1.47. Div.; 1.48. $2\left(\sqrt{2}+1\right)$ Conv.; 2. e; 5. Div.; 6. $\frac{1}{2}\ln 2$; 7. $\frac{1}{2}\ln 3$; 8. 6; 9. 3; 10. Div.; 11. Div.; 12. Div.; 13. Div.; 14.1. Conv.; 14.2. Conv.; 14.3. Div.; 14.4. Div.; 14.5. Div.; 14.6. Conv.; 14.7. Conv.; 14.8. Conv.; 14.9. Conv.; 14.10. Conv.; 14.11. Conv.; 14.12. Conv.; 14.13. Conv.; 14.14. Conv.; 14.15. Div.;

Bibliografía

1. **Purcell, E. - Varberg, D. - Rigdon, S.**: "*Cálculo*". Novena Edición. PEARSON Prentice Hall.
2. **Stewart, J.**: "*Cálculo*". Grupo Editorial Iberoamericano.
3. **Thomas, George**: "*Cálculo de una variable*". 12ma edición. Pearson.
4. **Larson - Hostetler - Edwards**, "*Cálculo*". Vol. 1. Mc Graw Hill.
5. **Leithold, Louis**, "*El cálculo con geometría analítica*". Harla S.A.

Este material ha sido revisado recientemente, pero esto no garantiza que esté libre de errores, por esa razón se agradece reportar cualquier error que usted encuentre en este material enviando un mensaje al correo electrónico

farith.math@gmail.com

indicando donde se encuentra(n) dicho(s) error(es). **MUCHAS GRACIAS**.

Matemática II - Guía 16

Aplicaciones de la integral definida. Volumen de un sólido.

Objetivos a cubrir

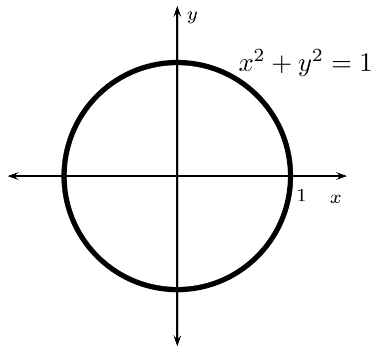
Código : MAT-CI.16

- Volumen de un sólido : Secciones transversales.
- Volumen de un sólido de revolución : Método del disco. Método de la arándela.
- Volumen de un sólido de revolución : Método de los cascarones.

Ejercicios resueltos

Ejemplo 324 *: Sea S un sólido con base circular de radio 1. Las secciones transversales paralelas, perpendiculares a la base, son triángulos equiláteros. Encuentre el volumen del sólido.*

Solución : Consideremos que el círculo está centrado en el origen de coordenadas, es decir, tiene ecuación $x^2 + y^2 = 1$.



Círculo de centro $(0, 0)$ y radio 1.

Sean $A(x, y_1)$ y $B(x, y_2)$ puntos del círculo, así,

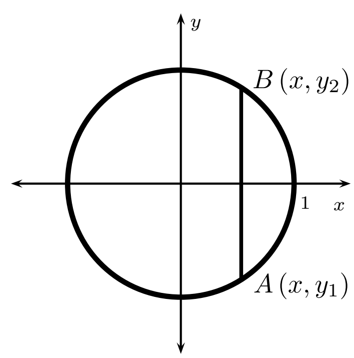
$$y = \pm\sqrt{1 - x^2},$$

con lo cual la base del triángulo ABC, es

$$|AB| = \sqrt{1 - x^2} - \left(-\sqrt{1 - x^2}\right),$$

es decir,

$$|AB| = 2\sqrt{1 - x^2}$$



Dado que el triángulo es equilátero, el área de la sección transversal es

$$A(x) = A_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}(\text{base})^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(2\sqrt{1 - x^2}\right)^2 = \sqrt{3}\left(1 - x^2\right)$$

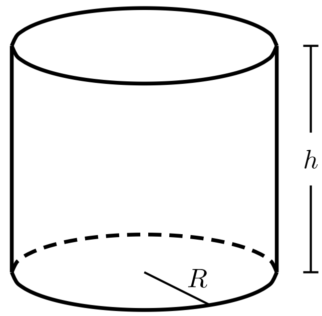
y el volumen del sólido es

$$V = \int_{-1}^{1} A(x)\, dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{3}\left(1 - x^2\right)\, dx = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

★

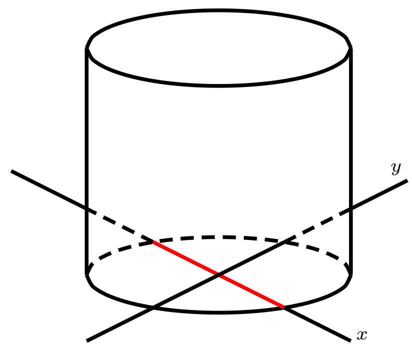
Ejemplo 325 *: Determinar el volumen de una cuña, cortada de un cilindro circular por un plano, que pasando por el diámetro de la base, está inclinado respecto a la base formando un ángulo α. El radio de la base es igual a R.*

Solución : Tenemos, el cilindro circular de radio R y altura h, con h un número real positivo.

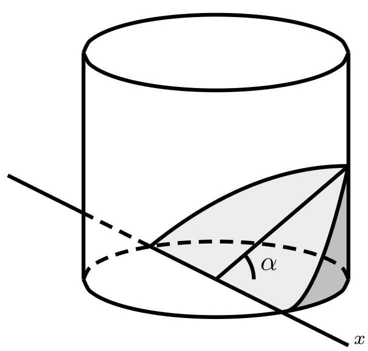


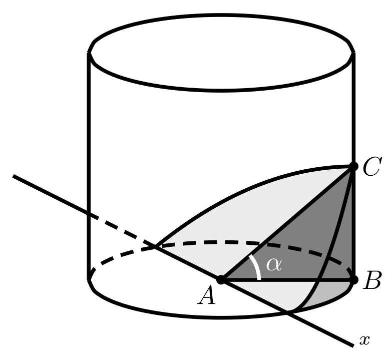
Cilindro circular de radio R y altura h

Sin pérdida de generalidad, colocamos el sistema coordenado de tal manera que el eje x coincida con el diámetro de la base



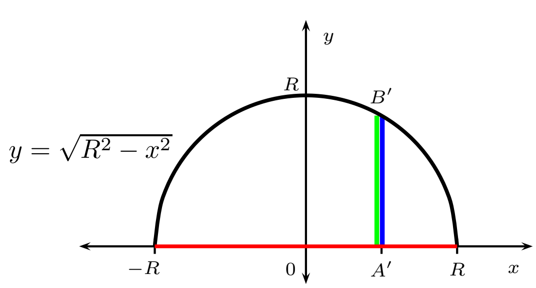
Por el eje x pasa el plano de corte y así, se obtiene la cuña. La ecuación de la circunferencia de la base es $x^2 + y^2 = R^2$.



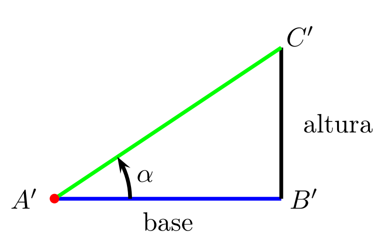


Observamos que las secciones transversales de la cuña, perpendiculares al diámetro, que se encuentran a una distancia x del origen de coordenadas $(0, 0)$, son triángulos, por lo tanto

$$A(x) = \frac{(\text{base}) \cdot (\text{altura})}{2}.$$



Cuña vista desde arriba



Sección transversal de la cuña

donde

$$\begin{aligned} \text{base} &= \text{longitud del cateto } A'B' = |A'B'|, \\ \text{altura} &= \text{longitud del cateto } B'C' = |B'C'|. \end{aligned}$$

Así,

$$\text{base} = |A'B'| = y(x) = \sqrt{R^2 - x^2},$$

mientras que, la altura se obtiene de la razón trigonométrica

$$\tan\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{|B'C'|}{|A'B'|} = \frac{|B'C'|}{\sqrt{R^2 - x^2}},$$

de aquí,

$$\tan\alpha = \frac{|B'C'|}{\sqrt{R^2 - x^2}} \qquad \Longrightarrow \qquad |B'C'| = \sqrt{R^2 - x^2}\ \tan\alpha,$$

por lo que,

$$\text{altura} = |B'C'| = \sqrt{R^2 - x^2}\ \tan\alpha.$$

Entonces, el área de la sección transversal, $A'B'C'$, será igual a

$$A_{\Delta A'B'C'} = A(x) = \frac{|A'B'| \cdot |B'C'|}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)\left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)\tan\alpha = \frac{\left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2}{2}\ \tan\alpha,$$

es decir,

$$A(x) = \frac{R^2 - x^2}{2}\ \tan\alpha.$$

Por lo tanto,

$$V = \int_{-R}^{R} A(x)\,dx = \int_{-R}^{R} \frac{R^2 - x^2}{2}\ \tan\alpha\ dx = \frac{\tan\alpha}{2}\int_{-R}^{R}\left(R^2 - x^2\right)dx.$$

Puesto que, el intervalo de integración, $[-R, R]$, es simétrico, estudiamos la simétria del integrando f

$$f(-x) = R^2 - (-x)^2 = R^2 - x^2 = f(x),$$

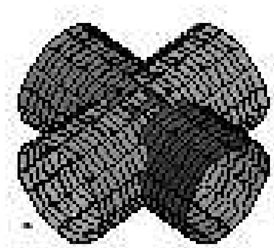
así, f es una función par y continua, por ser un polinomio, entonces

$$V = \int_{-R}^{R} A(x)\,dx = 2\ \frac{\tan\alpha}{2}\int_{0}^{R}\left(R^2 - x^2\right)\ dx = \frac{2}{3}\tan\alpha.$$

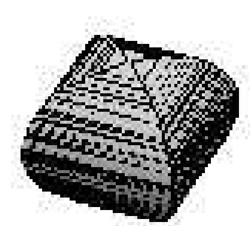
★

Ejemplo 326 *: Los ejes de dos cilindros horizontales, ambos de radio a, se intersecan en ángulo recto. Encuentre el volumen de su sólido de intersección.*

Solución : Tenemos



Cilindros horizontales que se intersectan perpendicularmente



Sólido intersección entre los cilindros

Observemos que cada sección transversal es un cuadrado, cuyo lado se extiende a lo largo de los dos círculos que generan los cilindros.

Sin pérdida de generalidad, consideramos los círculos centrados en el origen de coordenadas, así, puesto que, ambos cilindros tienen radio a, entonces, los círculos que los generan tienen ecuación $x^2 + y^2 = a^2$.

Sean $A(x, y_1)$ y $B(x, y_2)$ puntos del círculo, así,

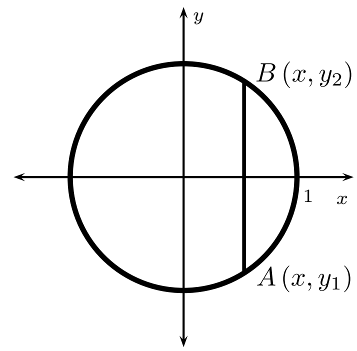
$$y = \pm\sqrt{a^2 - x^2},$$

con lo cual, la longitud de los lados del cuadrado, es

$$|AB| = \sqrt{a^2 - x^2} - \left(-\sqrt{a^2 - x^2}\right),$$

es decir,

$$\text{Lado} = |AB| = 2\sqrt{a^2 - x^2}$$



Entonces,

$$V = \int_{-a}^{a} \left(2\sqrt{a^2 - x^2}\right)^2 dx = 4\int_{-a}^{a} \left(a^2 - x^2\right)\, dx = \frac{16a^3}{3}.$$

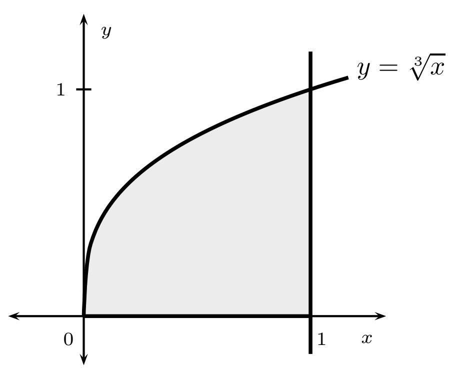
Luego,

$$V = \frac{16a^3}{3}.$$

★

Ejemplo 327 *: Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la región limitada por la curva* $y = \sqrt[3]{x}$, *la recta vertical* $x = 1$ *y el eje* x, *alrededor del eje* x.

Solución : La representación gráfica de la región es

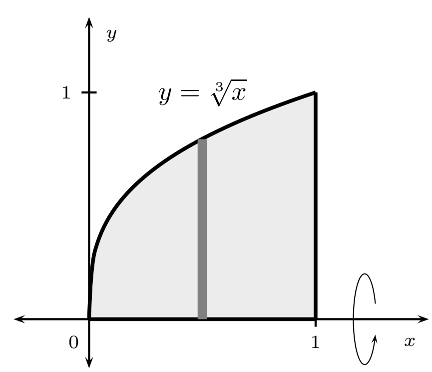


Giramos la región alrededor del eje de revolución x.

Por la ubicación de la región con respecto al eje de revolución x, utilizamos el método del disco, es decir, las secciones transversales serán perpendiculares al eje de revolución.

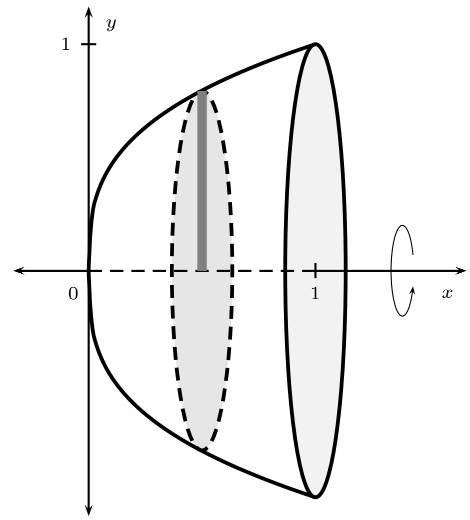
Las secciones transversales son disco de radio

$$\boxed{\text{Radio } = \sqrt[3]{x} - 0 = \sqrt[3]{x}}$$



Rectángulo representativo para el método del disco

Se genera el sólido



Sólido generado al girar la región dada
alrededor del eje de revolución x

El volumen del sólido viene dado por

$$V = \pi \int_0^1 \left(\sqrt[3]{x}\right)^2 dx = \pi \int_0^1 x^{2/3} dx = \frac{3}{5}\pi.$$

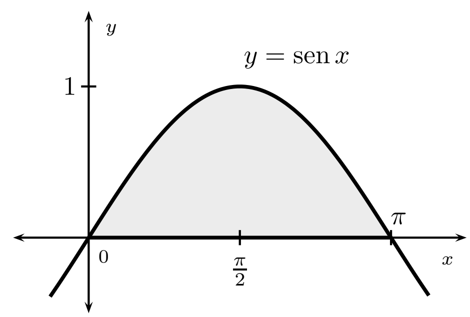
Luego,

$$V = \frac{3}{5}\pi.$$

★

Ejemplo 328 *: Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la región limitada por las curvas* $y = \operatorname{sen} x$, $y = 0$, $y = \pi$, *alrededor del eje* x.

Solución : La representación gráfica de la región es

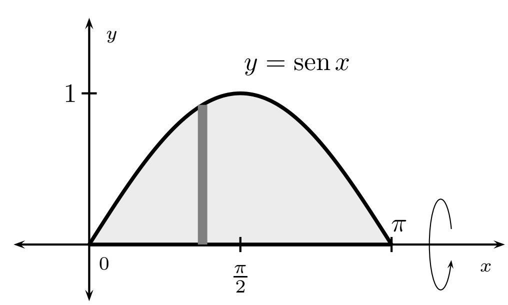


Giramos la región alrededor del eje de revolución x.

Por la ubicación de la región con respecto al eje de revolución x, utilizamos el método del disco, es decir, las secciones transversales serán perpendiculares al eje de revolución.

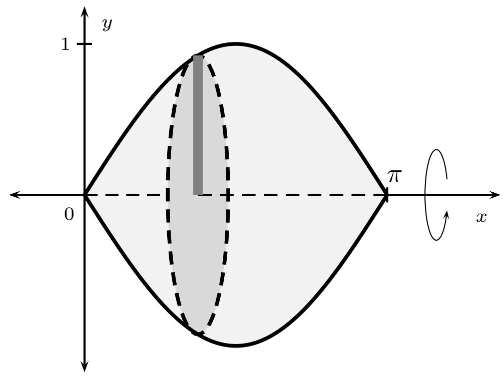
Las secciones transversales son disco de radio

$$\boxed{\text{Radio } = \operatorname{sen} x - 0 = \operatorname{sen} x}$$



Rectángulo representativo para
el método del disco

Se genera el sólido



Sólido generado al girar la región dada
alrededor del eje de revolución x

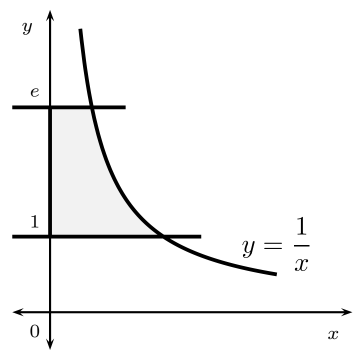
El volumen viene dado por la integral

$$V = \pi \int_0^{\pi} (\operatorname{sen} x)^2 \, dx = \pi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x \, dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos(2x)}{2} \, dx = \frac{\pi^3}{2}.$$

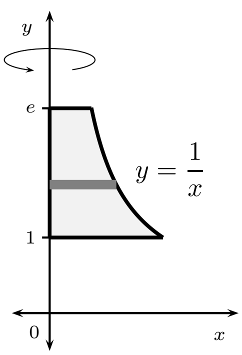
★

Ejemplo 329 *: Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la región limitada por la curva $xy = 1$, las rectas horizontales $y = 1$, $y = e$ y el eje de las ordenadas, alrededor del eje y.*

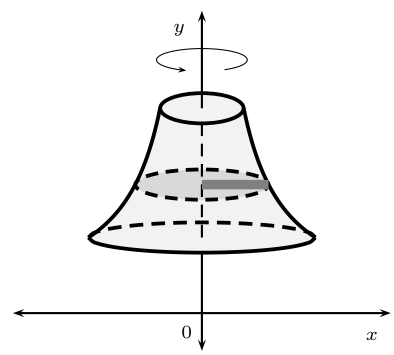
Solución : La representación gráfica de la región es



Giramos la región alrededor del eje de revolución y. Por la ubicación de la región con respecto al eje de revolución y, utilizamos el método del disco, es decir, las secciones transversales serán perpendiculares al eje de revolución



Rectángulo representativo para
el método del disco



Sólido generado al girar la región dada
alrededor del eje de revolución y

por lo que, la integral que nos proporciona el volumen debe ser expresada en variable y, para ello, despejamos la variable x de la función $y = \dfrac{1}{x}$ y obtenemos $x = \dfrac{1}{y}$.

Las secciones transversales son disco de radio

$$\boxed{\text{Radio } = \frac{1}{y} - 0 = \frac{1}{y}}$$

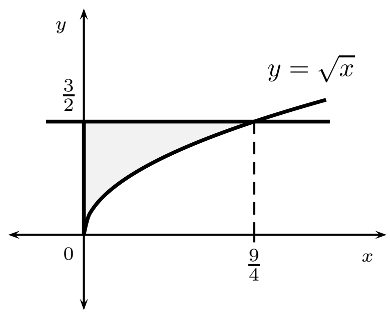
El volumen viene dado por la integral

$$V = \pi \int_1^e \left(\frac{1}{y}\right)^2 \, dy = \pi \int_1^e \frac{dy}{y^2} = \left(1 - e^{-1}\right)\pi.$$

★

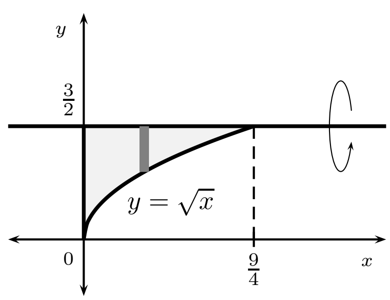
Ejemplo 330 *: Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la región limitada por las curvas* $y = \sqrt{x}$, $y = \dfrac{3}{2}$ *y el eje* y *alrededor de la recta* $y = \dfrac{3}{2}$.

Solución : La representación gráfica de la región es



Giramos la región alrededor del eje de revolución $y = \dfrac{3}{2}$.

Por la ubicación de la región con respecto al eje de revolución $y = \dfrac{3}{2}$, utilizamos el método del disco, es decir, las secciones transversales serán perpendiculares al eje de revolución.

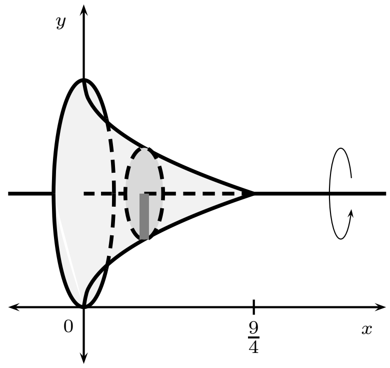


Rectángulo representativo para el método del disco

Las secciones transversales son disco de radio

$$\boxed{\text{Radio } = \frac{3}{2} - \sqrt{x}}$$

Se genera el sólido



Sólido generado al girar la región dada
alrededor del eje de revolución $x = \frac{3}{2}$

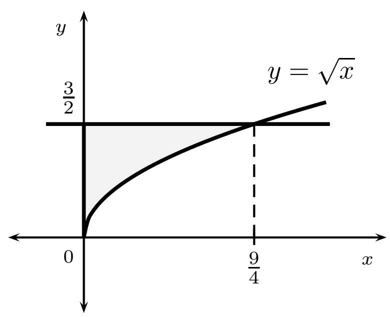
El volumen viene dado por

$$V = \pi \int_0^{9/4} \left(\frac{3}{2} - \sqrt{x} \right)^2 \, dx = \frac{27}{32}\pi.$$

★

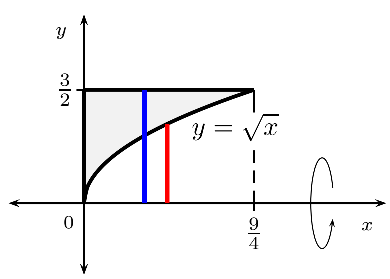
Ejemplo 331 *: Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la región del ejemplo 330 alrededor del eje* x.

Solución : La representación gráfica de la región es



Giramos la región alrededor del eje de revolución x.

Por la ubicación de la región con respecto al eje de revolución x, utilizamos el método de las arándelas, es decir, las secciones transversales serán perpendiculares al eje de revolución.

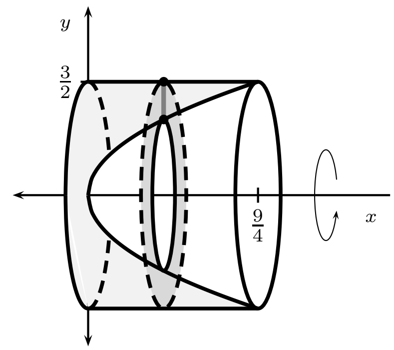


Rectángulos representativos para
el método de las arandelas

Las secciones transversales son arandelas de radios

Radio mayor $= \frac{3}{2} - 0 = \frac{3}{2}$	Radio menor $= \sqrt{x} - 0 = \sqrt{x}$

Se genera el sólido



Sólido generado al girar la región dada
alrededor del eje de revolución x

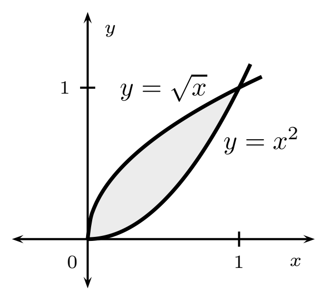
La integral que proporciona el volumen viene dada por

$$V = \pi \int_0^{9/4} \left(\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{x}\right)^2 \right) dx = \pi \int_0^{9/4} \left(\frac{9}{4} - x \right) dx = \frac{81}{32}\pi.$$

★

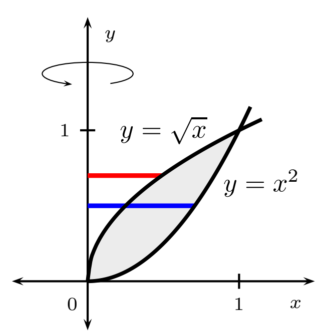
Ejemplo 332 *: Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la región limitada por las curvas* $y = \sqrt{x}$*,* $y = x^2$ *alrededor del eje* y*.*

Solución : La representación gráfica de la región es



Giramos la región alrededor del eje de revolución y.

Por la ubicación de la región respecto al eje de revolución y, aplicamos el método de las arándelas, es decir, las secciones transversales serán perpendiculares al eje de revolución

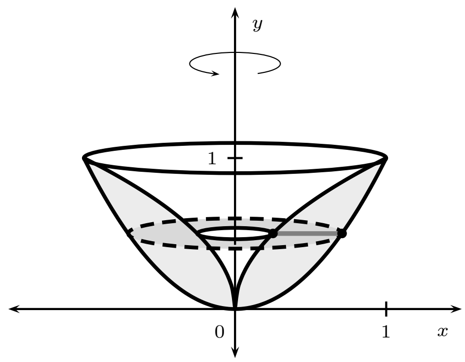


Rectángulos representativos para
el método de las arandelas

por lo que, la integral que nos proporciona el volumen debe ser expresada en variable y, para ello, despejamos la variable x de las funciones $y = \sqrt{x}$ y $y = x^2$, obtenemos que $x = y^2$ y por otro lado, $x = \sqrt{y}$, Las secciones transversales son arandelas de radios

Radio mayor $=\sqrt{y}-0=\sqrt{y}$	Radio menor $=y^2-0=y^2$

Se genera el sólido



Sólido generado al girar la región dada
alrededor del eje de revolución y

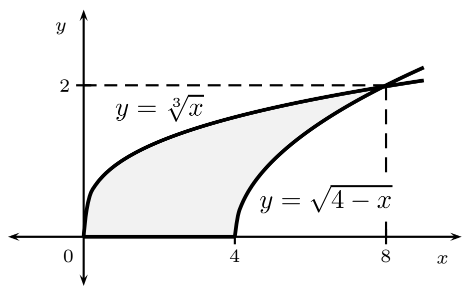
La integral que proporciona el volumen viene dada por

$$V=\pi\int_0^1\left(\left(\sqrt{y}\right)^2-\left(y^2\right)^2\right)dy=\pi\int_0^1\left(y-y^4\right)dy=\frac{3}{10}\pi.$$

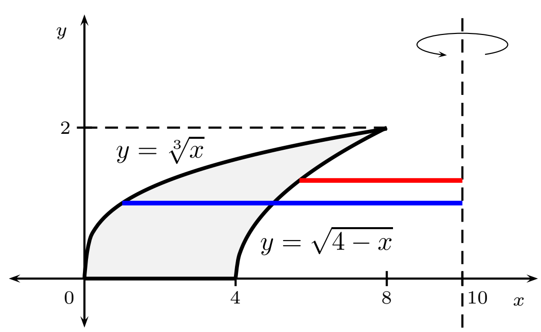
★

Ejemplo 333 *: Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la región limitada por las curvas* $y=\sqrt[3]{x}$, $y=\sqrt{x-4}$ *y el eje* x, *alrededor de la recta* $x=10$.

Solución : La representación gráfica de la región es



Giramos la región alrededor del eje de revolución $x=10$. Por la ubicación de la región con respecto al eje de revolución $x=10$, utilizamos el método de las arándelas, es decir, las secciones transversales serán perpendiculares al eje de revolución



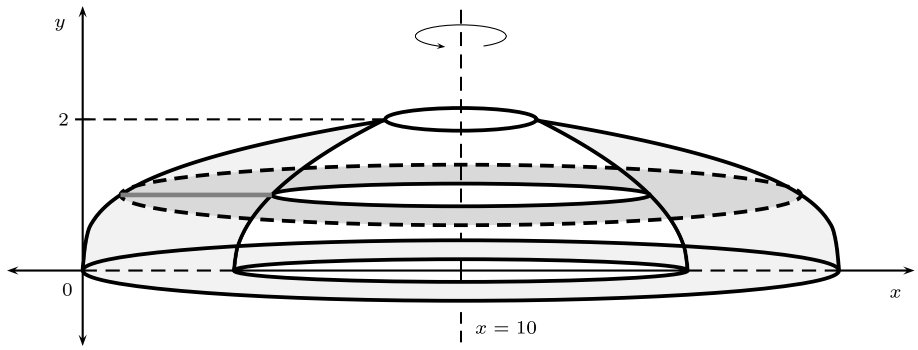
Rectángulos representativos para
el método de las arandelas

por lo que, la integral que nos proporciona el volumen debe ser expresada en variable y, por lo tanto, despejamos la variable x, de las funciones $y = \sqrt[3]{x}$ y $y = \sqrt{x-4}$, obteniendo $x = y^3$ y $x = y^2 + 4$, respectivamente.

Los radios de la sección transversal son

Radio mayor $= 10 - y^3 = \sqrt{y}$	Radio menor $= 10 - \left(y^2 + 4\right) = 6 - y^2$

Se genera el sólido



Sólido generado al girar la región dada
alrededor del eje de revolución $x = 10$

La integral que proporciona el volumen viene dada por

$$V = \pi \int_0^2 \left(\left(10 - y^2\right)^2 - \left(6 - y^2\right)^2 \right) dy = \pi \int_0^2 \left(100 - 20y^2 + y^6 - \left(36 - 36y^2 + y^4\right)\right) dy$$

$$= \pi \int_0^2 \left(y^6 - y^4 - 20y^3 + 12y^2 + 64\right) dy = \frac{3216}{35}\pi.$$

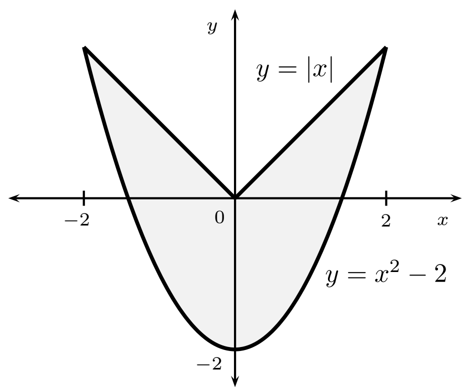
Luego,

$$V = \frac{3216}{35}\pi.$$

★

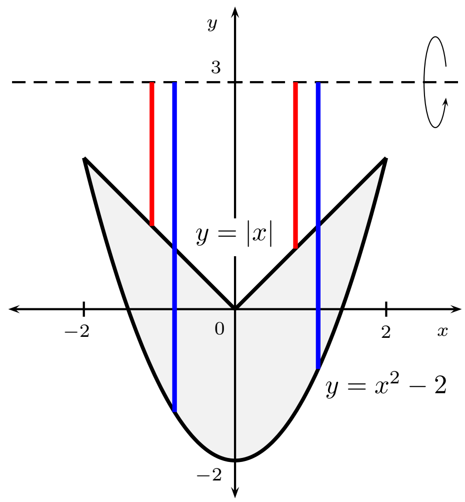
Ejemplo 334 *: Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la región limitada por las curvas* $y = |x|$, $y = x^2 - 2$, *alrededor de la recta* $y = 3$.

Solución : La representación gráfica de la región es



Giramos la región alrededor del eje de revolución $y = 3$.

Por la ubicación de la región con respecto al eje de revolución $y = 3$, utilizamos el método de las arándelas, es decir, las secciones transversales serán perpendiculares al eje de revolución



Rectángulos representativos para
el método de las arandelas

Observemos que debemos se tiene dos radios menores, ya que si $x < 0$, tenemos la recta $y = -x$, mientras que si $x > 0$, la recta es $y = x$, de aquí, los radios de la sección transversal son

Radio mayor $= 3 - \left(x^2 - 2\right) = 5 - x^2$	Radio menor $= 3 - (-x) = 3 + x$ si $-2 \leq x \leq 0$ Radio menor $= 3 - (x) = 3 - x$ si $0 \leq x \leq 2$

Por lo tanto, el volumen se calcula por medio de las integrales

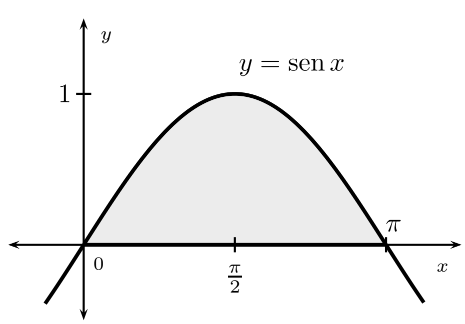
$$V = \pi \int_{-2}^{0} \left(\left(5 - x^2\right)^2 - (3 + x)^2 \right) dx + \pi \int_{0}^{2} \left(\left(5 - x^2\right)^2 - (3 - x)^2 \right) dx$$

$$= 2\pi \int_{0}^{2} \left(\left(5 - x^2\right)^2 - (3 - x)^2 \right) dx = \frac{632}{15}\pi.$$

★

Ejemplo 335 *: Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la región del ejemplo 328 alrededor del eje x.*

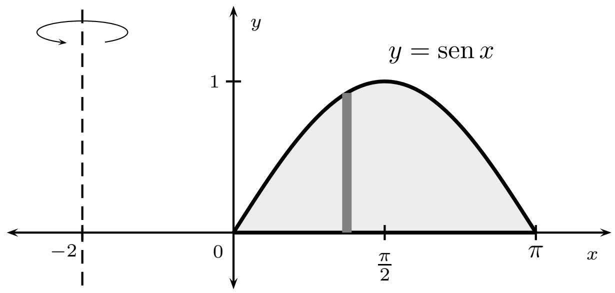
Solución : La representación gráfica de la región es



Giramos la región alrededor del eje de revolución $x = -2$.

Por la ubicación de la región con respecto al eje de revolución $x = -2$, se aconseja utilizar el método de las capas (también conocido como el método de las envolventes cilindrícas ó el método de los cascarones), con $y = \operatorname{sen} x$.

Los rectángulos representativos son paralelos al eje de revolución.



Rectángulo representativo para
el método de las capas

El volumen viene dado por

$$V = 2\pi \int_0^{\pi} p(x)\, R(x)\; dx,$$

donde

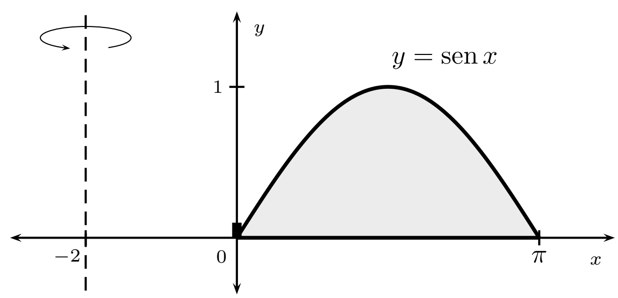
$$p(x): \text{ distancia del rectángulo representativo al eje de revolución}$$

y

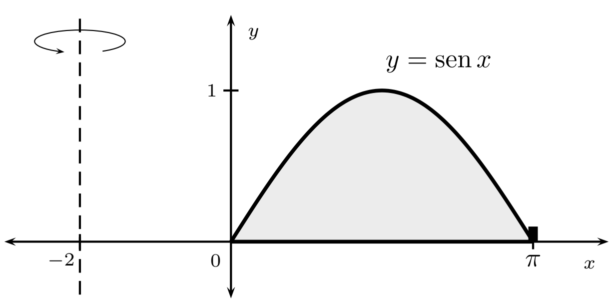
$$R(x): \text{ longitud del rectángulo representativo.}$$

Calculamos $p(x)$. Hay varias manera de encontrar $p(x)$, una de ellas es la siguiente

Consideremos el rectángulo representativo colocado en el extremo izquierdo del intervalo $[0, \pi]$, es decir, en $x = 0$, la distancia de ese rectángulo representativo al eje de revolución, recta horizontal, $x = -2$ es igual a dos, 2, así, obtenemos el punto $(0, 2)$.



Rectángulo representativo en el
extremo izquierdo del intervalo



Rectángulo representativo en el
extremo derecho del intervalo

Consideremos el rectángulo representativo colocado en el extremo derecho del intervalo $[0, \pi]$, es decir, en $x = \pi$, la distancia de ese rectángulo representativo al eje de revolución, recta horizontal, $x = -2$ es igual a π más dos, $\pi+2$, así, obtenemos el punto $(\pi, \pi + 2)$.

Buscamos la recta que pasa por estos dos puntos, $(0, 2)$ y $(\pi, \pi + 2)$, la cual tiene como ecuación $y = x+2$, entonces $p(x) = x + 2$.

Por otra parte, $R(x) = \operatorname{sen} x - 0 = \operatorname{sen} x$.

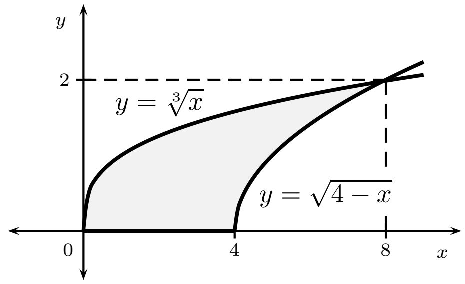
Luego, el volumen viene dado por

$$V = 2\pi \int_0^{\pi} (x+2)\operatorname{sen} x \; dx = 2\pi\,(\pi + 4)\,.$$

★

Ejemplo 336 *: Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la región del ejemplo 333 alrededor de* x.

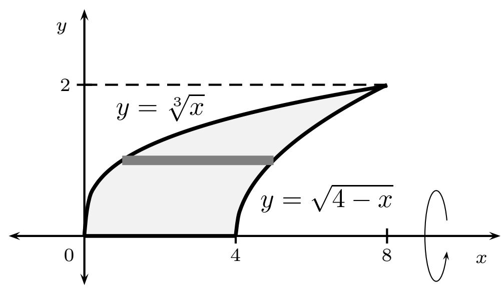
Solución : La representación gráfica de la región es



Giramos la región alrededor del eje de revolución x

Por la ubicación de la región con respecto al eje de revolución x, se aconseja utilizar el método de las capas (también conocido como el método de las envolventes cilindrícas ó el método de los cascarones).

Los rectángulos representativos son paralelos al eje de revolución, por lo tanto, despejamos la variable x de las funciones $y = \sqrt[3]{x}$ y $y = \sqrt{4-x}$ y obtenemos $x = y^3$ y $x = y^2 + 4$, respectivamente



Rectángulo representativo para
el método de las capas

El volumen viene dado por

$$V = 2\pi \int_0^{2} p\,(y)\, R\,(y)\; dy,$$

donde

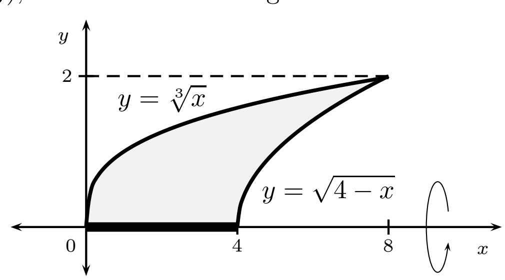
$$p\,(y) : \text{ distancia del rectángulo representativo al eje de revolución}$$

y

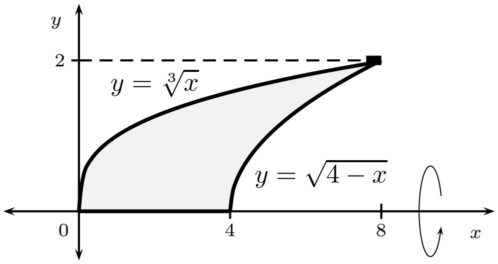
$$R\,(y) : \text{ longitud del rectángulo representativo.}$$

Calculamos $p\,(y)$. Hay varias manera de encontrar $p\,(y)$, una de ellas es la siguiente

Consideremos el rectángulo representativo colocado en el extremo izquierdo del intervalo $[0,2]$, es decir, en $x = 0$, la distancia de ese rectángulo representativo al eje de revolución (eje) x es igual a cero, 0, así, obtenemos el punto $(0,0)$.



Rectángulo representativo en el
extremo izquierdo del intervalo



Rectángulo representativo en el extremo derecho del intervalo

Consideremos el rectángulo representativo colocado en el extremo derecho del intervalo $[0, 2]$, es decir, en $x = 2$, la distancia de ese rectángulo representativo al eje de revolución (eje) x es igual a dos, 2, así, obtenemos el punto $(2, 2)$.

Buscamos la recta que pasa por estos dos puntos, $(0, 0)$ y $(2, 2)$, la cual tiene como ecuación $x = y$, entonces $p(y) = y$.

Por otra parte, $R(y) = y^2 + 4 - y^3$.

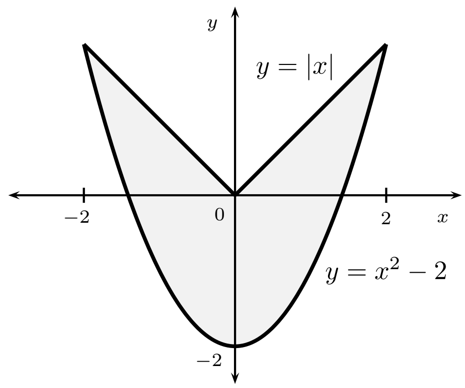
Luego, el volumen viene dado por

$$V = 2\pi \int_0^2 y\left(y^2 + 4 - y^3\right) dy = 2\pi \int_0^2 \left(y^3 + 4y - y^4\right) dy = \frac{56}{5}\pi.$$

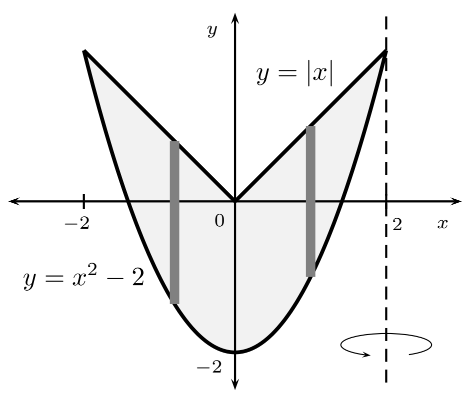
★

Ejemplo 337 *: Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la región del ejemplo 334, alrededor de la recta $x = 2$.*

Solución : La representación gráfica de la región es



Giramos la región alrededor del eje de revolución $x = 2$. Por la ubicación de la región con respecto al eje de revolución $x = 2$, se aconseja utilizar el método de las capas (también conocido como el método de las envolventes cilindrícas ó el método de los cascarones), con $y = |x|$ y $y = x^2 - 2$. Los rectángulos representativos son paralelos al eje de revolución



Rectángulo representativo para el método de las capas

El volumen viene dado por

$$V = 2\pi \int_{-2}^{2} p(x)\, R(x)\ dx,$$

donde

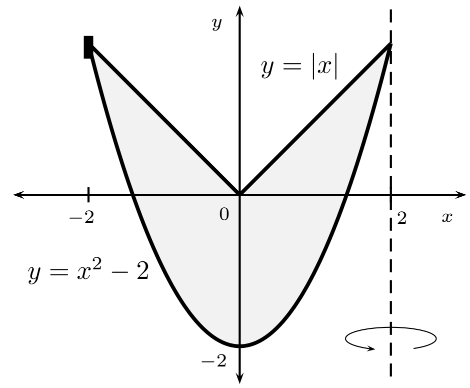
$$p(x): \text{ distancia del rectángulo representativo al eje de revolución}$$

y

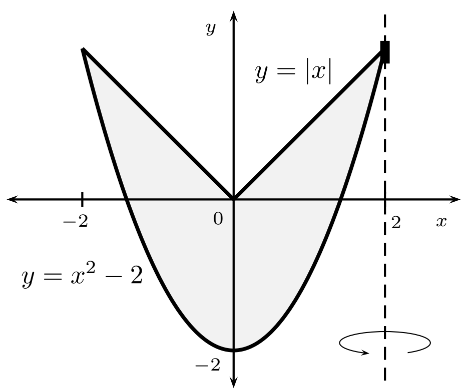
$$R(x): \text{ longitud del rectángulo representativo.}$$

Calculamos $p(x)$. Hay varias manera de encontrar $p(x)$, una de ellas es la siguiente

Consideremos el rectángulo representativo colocado en el extremo izquierdo del intervalo $[-2,2]$, es decir, en $x=-2$, la distancia de ese rectángulo representativo al eje de revolución, recta vertical, $x=2$ es igual a cuatro, 4, así, obtenemos el punto $(-2,4)$.



Rectángulo representativo en el extremo izquierdo del intervalo



Rectángulo representativo en el extremo derecho del intervalo

Consideremos el rectángulo representativo colocado en el extremo derecho del intervalo $[-2,2]$, es decir, en $x=2$, la distancia de ese rectángulo representativo al eje de revolución, recta vertical, $x=2$ es igual a cero, 0, así, obtenemos el punto $(2,0)$.

Buscamos la recta que pasa por estos dos puntos, $(-2,4)$ y $(2,0)$, la cual tiene como ecuación $y=2-x$, entonces $p(x)=2-x$.

Por otra parte, observe que se tiene dos $R(x)$.

$$\text{Si} \quad -2 \le x \le 0, \quad \text{tenemos que} \quad R(x) = -x - \left(x^2-2\right) \implies R(x) = 2 - x - x^2$$

y

$$\text{Si} \quad 0 \le x \le 2, \quad \text{tenemos que} \quad R(x) = x - \left(x^2-2\right) \implies R(x) = 2 + x - x^2$$

Luego, el volumen viene dado por

$$V = 2\pi \int_{-2}^{0} (2-x)\left(2-x-x^2\right) dx + 2\pi \int_{0}^{2} (2-x)\left(2+x-x^2\right) dx = \frac{80}{3}\pi.$$

★

Ejemplo 338 *: Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la región limitada por las curvas*

$$y = x^3 + x^2 + 2x + 1, \qquad x = 1$$

y los ejes coordenados alrededor de la recta vertical $x = 2$*.*

Solución : Obtenemos la gráfica de la región en el intervalo $[0, 1]$.

Observe que el comportamiento de la función fuera del intervalo $[0, 1]$ no es de interés para la obtención del volumen del sólido.

Así

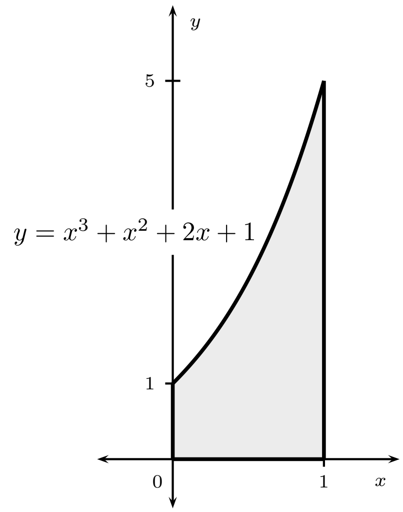
$$\text{Si } x = 0 \text{ entonces } y = (0)^3 + (0)^2 + 2(0) + 1 = 1$$

$$\text{Si } x = 1 \text{ entonces } y = (1)^3 + (1)^2 + 2(1) + 1 = 5$$

además, la función $y = x^3 + x^2 + 2x + 1$ es creciente en $[0, 1]$, ya que

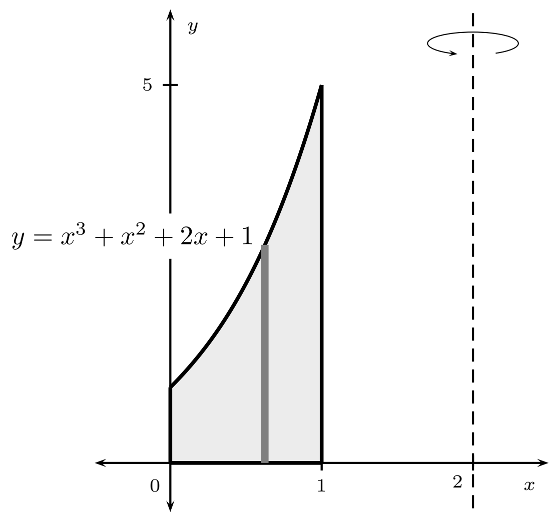
$$y' = \left(x^3 + x^2 + 2x + 1\right)' = 3x^2 + 2x + 2 > 0,$$

por lo que, la representación gráfica de la región es



Como debemos girar alrededor de la recta $x = 2$ usamos el método de las capas (también conocido como el método de las envolventes cilindrícas ó el método de los cascarones), con $y = x^3 + x^2 + 2x + 1$.

Los rectángulos representativos son paralelos al eje de revolución



Rectángulo representativo para el método de las capas

Como es conocido, el volumen viene dado por

$$V = 2\pi \int_0^1 p(x)\, R(x)\ dx$$

donde

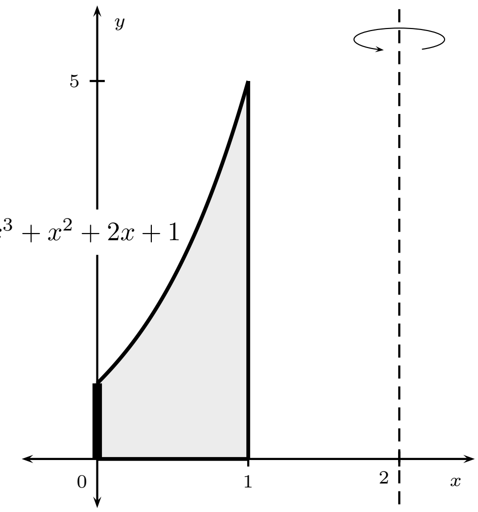
$$p(x) \ : \ \text{distancia del rectángulo representativo al eje de revolución}$$

y

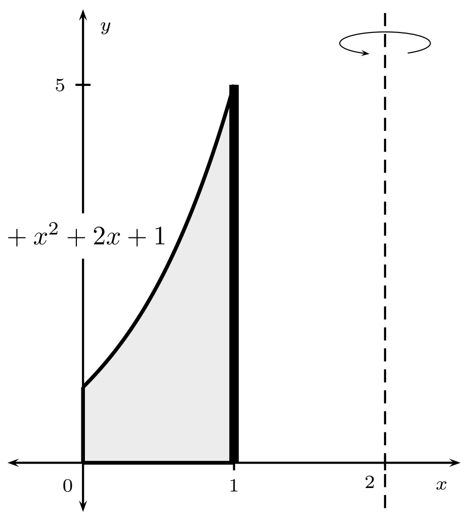
$$R(x) \ : \ \text{longitud del rectángulo representativo.}$$

Calculamos $p(x)$. Hay varias manera de encontrar $p(x)$, una de ellas es la siguiente

Consideremos el rectángulo representativo colocado en el extremo izquierdo del intervalo, es decir, en $x = 0$, la distancia de ese rectángulo al eje de revolución, recta vertical, $x = 2$ es igual a dos, 2, así, obtenemos el punto $(0, 2)$.



Rectángulo representativo en el extremo izquierdo del intervalo



Rectángulo representativo en el extremo derecho del intervalo

Consideremos el rectángulo representativo colocado en el extremo derecho del intervalo, es decir, en $x = 1$, la distancia de ese rectángulo al eje de revolución, recta vertical, $x = 2$ es igual a 1, así, obtenemos el punto $(1, 1)$.

Buscamos la recta que pasa por estos dos puntos $(0, 2)$ y $(1, 1)$, la cual tiene como ecuación $y = -x + 2$, entonces, $p(x) = -x + 2$.

Por otra parte, $R(x) = \left(x^3 + x^2 + 2x + 1\right) - (0) = x^3 + x^2 + 2x + 1$.

La integral que nos proporciona el volumen viene dada por

$$V = 2\pi \int_0^1 (-x + 2)\left(x^3 + x^2 + 2x + 1\right) dx = \frac{71}{10}\pi.$$

★

Ejercicios

1. La base de un sólido es un disco circular de radio 3. Calcule el volumen del sólido si las secciones transversales perpendiculares a la base son triángulos rectángulos isósceles, cuya hipotenusa se encuentra sobre la base del sólido.

2. La base de un sólido es la región limitada por $y = 1 - x^2$ y $y = 1 - x^4$. La sección transversal del sólido perpendicular al eje x es un cuadrado. Encuentre el volumen del sólido.

3. Encuentre el volumen del casquete de una esfera con radio r y altura h.

4. La base de un sólido es un círculo con un radio r unidades y todas las secciones planas perpendiculares a un diámetro fijo de la base son triángulos rectos isósceles que tiene la hipotenusa en el plano de la base. Encontrar el volumen del sólido.

5. La base de un sólido es la región interior del círculo $x^2+y^2=4$. Encuentre el volumen del sólido si toda sección transversal mediante un plano perpendicular al eje x es un cuadrado.

6. La base de un sólido está limitada por un arco de $y=\sqrt{\cos x}$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$. Toda sección transversal perpendicular al eje x es un cuadrado apoyado sobre su base. Encuentre el volumen del sólido.

7. Dos cilindros rectos circulares, cada uno con radio r unidades, tiene ejes que se intersectan en ángulos rectos. Encontrar el volumen del sólido común a los dos cilindros.

8. La base de un sólido es la región R limitada por $y=\sqrt{x}$ y $y=x^2$. Toda sección transversal perpendicular al eje x es un semicírculo cuyo diámetro se extiende a lo largo de R. Encuentre el volumen del sólido.

9. Una cuña se corta de un sólido en forma de cilindro recto circular con un radio de r pul por un plano que pasa a través de un diámetro de la base y forma un ángulo de 45° con el plano de la base. Encontrar el volumen de la cuña.

10. La base de un sólido es la región limitada por las parábolas $y=x^2$ y $y=2-x^2$. Obtenga el volumen del sólido si las secciones transversales perpendiculares al eje x son cuadrados con un lado a lo largo de la base del sólido.

11. La altura de un monumento es de 20 m. Una sección transversal horizontal que está a una distancia de x metros de la parte superior es un triángulo equilátero cuyo lado mide $x/4$ metros. Calcule el volumen del monumento.

12. (a) La base de un sólido es un cuadrado con vértices en $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ y $(0,-1)$. Cada sección transversal perpendicular al eje x es un semicírculo. Obtenga el volumen del sólido.
    (b) Demuestre que cortando el sólido considerado en la parte 12a, se le puede reacomodar para formar un cono. Luego, calcule su volumen.

13. Un servilletero se obtiene practicando un agujero cilíndrico en una esfera de modo que el eje de aquél pase por el centro de ésta. Si la longitud del agujero es $2h$, demostrar que el volumen del servilletero es $\pi a h^2$, siendo a un número racional.

14. Un sólido tiene una base de radio 2. Cada sección producida por un plano perpendicular a un diámetro fijo es un triángulo equilátero. Calcular el volumen del sólido.

15. Las secciones transversales de un sólido por planos perpendiculares al eje x son cuadrados con centros en dicho eje. Si al cortar por el plano perpendicular en el punto de abscisa x, se obtiene un cuadrado cuyo lado es $2x^2$, se trata de hallar el volumen del sólido entre $x=0$ y $x=a$.

16. Hallar el volumen de un sólido cuya sección transversal por un plano perpendicular al eje x tiene de área ax^2+bx+c para cada x del intervalo $0 \leq x \leq h$. Expresar el volumen en función de las áreas B_1, M y B_2 de las secciones transversales correspondientes a $x=0$, $x=\dfrac{h}{2}$ y $x=h$, respectivamente. La fórmula que resulta se conoce por *fórmula del prismatoide*.

17. Encuentre el volumen de un cono circular recto de altura h y radio de la base r.

18. Encuentre el volumen de un tronco de un cono circular recto con altura h, radio de la base inferior R y radio superior r.

19. Encuentre el volumen del tronco de una pirámide con base cuadrada de lado b, cuadrado superior de lado a y altura h. ¿Qué sucede se $a=b$? ¿Si $a=0$?

20. Encuentre el volumen de una pirámide con altura h y base rectangular con dimensiones b y $2b$.

21. Encuentre el volumen de una pirámide con altura h y un triángulo equilátero con lado a (un tetraedro) como base.

22. Encuentre el volumen de un tetraedro con tres caras perpendiculares entre sí y tres aristas perpendiculares entre sí con longitudes de 3 cm, 4 cm y 5 cm.

23. Encuentre el volumen de S, si la base de S es un disco circular con radio r. Las secciones transversales paralelas perpendiculares a la base, son cuadrados.

24. Encuentre el volumen de S, si la base de S es la región parabólica $\left\{(x,y) \;/\; x^2 \leq y \leq 1\right\}$. Las secciones transversales perpendiculares al eje y son triángulos equiláteros.

25. Encuentre el volumen de S, si S tiene la misma base que la del ejercicio 24, pero las secciones transversales perpendiculares al eje y son cuadrados.

26. Encuentre el volumen de S, si la base de S es la región triangular con vértices $(0,0)$, $(2,0)$ y $(0,2)$. Las secciones transversales perpendiculares al eje x son semicírculos.

27. Encuentre el volumen de S, si S tiene la misma base que la del ejercicio 26, pero las secciones transversales perpendiculares al eje x son triángulos isósceles con altura igual a la base.

28. (a) Enuncie una integral para obtener el volumen de un *toro* sólido con radio r y R.
    (b) Interprete la integral como un área y halle el volumen del toro.

29. Se recorta una cuña de un cilindro circular de radio 4 mediante dos planos. Uno de los planos es perpendicular al eje del cilindro. El otro se interseca con el primero en un ángulo de $30°$ a lo largo de un diámetro del cilindro. Encuentre el volumen de la cuña.

30. Encuentre el volumen común a dos esferas cada una con radio r, si el centro de cada una se encuentra en la superficie de la otra.

31. La base de un cierto sólido es un triángulo equilátero de lado a, con un vértice en el origen y una altura a lo largo del eje x. Cada plano perpendicular al eje x corta al sólido en una sección cuadrada con un lado en la base del sólido. Hallar el volumen.

32. Cada plano perpendicular al eje x corta a un cierto sólido en una sección circular cuyo diámetro está en el plano xy y se extiende desde $x^2 = 4y$ hasta $y^2 = 4x$. El sólido está entre los puntos de intersección de estas curvas. Hallar su volumen.

33. Si la base de un sólido es un círculo con un radio de r unidades y si todas las secciones planas perpendiculares a un diámetro fijo de la base son cuadradas, encontrar el volumen del sólido.

34. Se corta una cuña de un cilindro de r pul por medio de dos planos, uno perpendicular al eje del cilindro y el otro intersectando al primero en un ángulo de $60°$ a lo largo de un diámetro de la sección plana circular, encontrar el volumen de la cuña.

35. La base de un sólido es un círculo que tiene un radio de r unidades. Encontrar el volumen del sólido si todas las secciones planas perpendiculares a un diámetro fijo de la base son triángulos equiláteros.

36. Resolver el ejercicio 4 si los triángulos rectos isósceles tienen un cateto en el plano de la base.

37. Encontrar el volumen de una pirámide recta que tiene una altura de h unidades y una base cuadrada de a unidades de lado.

38. La base de un sólido es un círculo con un radio 4 pul y cada sección plana perpendicular a un diámetro fijo de la base es un triángulo isósceles que tiene una altura de 10 pul y una cuerda del círculo como una base. Encontrar el volumen del sólido.

39. La base de un sólido es un círculo con un radio de 9 pul y cada sección plana perpendicular a un diámetro fijo de la base es un cuadrado que tiene una cuerda del círculo como diagonal. Encontrar el volumen del sólido.

40. Una cuña se corta de un sólido en forma de cono recto circular que tiene un radio de la base de 5 pul y una altura de 20 pul por medios de dos planos a través del eje del cono. El ángulo entre los dos planos es de $30°$. Encontrar el volumen de la cuña cortada.

41. Dibuje la región R limitada por las gráficas de las ecuaciones dadas, mostrando un rectángulo vertical característico. Encuentre después el volumen del sólido generado por la rotación de R alrededor del eje x.

    1. $y = \dfrac{x^2}{4}, \quad x = 4, \quad y = 0$
    2. $y = x^{2/3}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 8$
    3. $y = x^3, \quad x = 2, \quad y = 0$
    4. $y = x^{3/2}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 3$
    5. $y = \dfrac{1}{x}, \quad x = 1, \quad x = 4, \quad y = 0$
    6. $y = \sqrt{4 - x^2}, \quad y = 0, \quad x = -1, \quad x = 2$

42. Dibuje la región R limitada por las gráficas de las ecuaciones dadas, mostrando un rectángulo vertical característico. Encuentre después el volumen del sólido generado por la rotación de R alrededor del eje y.

    1. $x = y^2, \quad x = 0, \quad y = 2$;
    2. $x = \dfrac{2}{y}, \quad y = 6, \quad y = 1, \quad x = 0$;
    3. $x = \sqrt{y}, \quad y = 4, \quad x = 0$;
    4. $x = \sqrt{9 - y^2}, \quad x = 0$;
    5. $x = y^{2/3}, \quad y = 8, \quad x = 0$;
    6. $x = y^{3/2}, \quad y = 4, \quad x = 0$;

43. Dibuje la región R limitada por las gráficas de las ecuaciones dadas, mostrando un rectángulo vertical característico. Encuentre después el volumen del sólido generado por la rotación de R alrededor del eje indicado.

	Región	En torno		Región	En torno
1.	$x = y^2, \quad x = 1$;	$x = 1$	2.	$x + y = 3, \quad y = 2x, \quad x = 0$;	eje y
3.	$x = -y^2 + 2y, \quad x = 0$;	$x = 2$	4.	$x + y = 2, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad y = 1$;	eje x
5.	$y = x^{1/3}, \quad x = 0, \quad y = 1$;	$y = 2$	6.	$y = \sqrt{x - 1}, \quad x = 5, \quad y = 0$;	$x = 5$

44. Encuentre el volumen del sólido generado por la rotación alrededor del eje x de la región limitada por la mitad superior de la elipse
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
y el eje x, encuentre después el volumen del esferoide alargado. Aquí, a y b son constantes positivas, siendo $a > b$.

45. Encuentre el volumen del sólido generado por la rotación alrededor del eje x de la región limitada por la recta $y = 4x$ y la parábola $y = 4x^2$.

46. Encuentre el volumen del sólido generado por la rotación alrededor del eje x de la región limitada por la recta $x = -2y$ y la parábola $y^2 - 2x = 0$.

47. Encuentre el volumen del sólido generado por la rotación alrededor del eje x de la región del primer cuadrante limitada por la recta $x = r - h$, el círculo $x^2 + y^2 = r^2$, siendo $0 < h < r$ y encuentre después el volumen de un segmento esférico de altura h, si el radio de la esfera es r.

48. Halle el volumen del sólido que se genera al girar la región limitada por las curvas $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $y = |x| - r$, alrededor de $x = r$.

49. Encuentre el volumen del sólido generado por la rotación alrededor del eje y de la región limitada por la recta $y = 4x$ y la parábola $y = 4x^2$.

50. Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la región limitada por las curvas $y = x^3$, $y = x$, alrededor de $x = 2$.

51. Encuentre el volumen del sólido generado por la rotación alrededor de la recta $y = 2$ de la región limitada por las parábolas $3x^2 - 16y + 48 = 0$ y $x^2 - 16y + 80$ y el eje y.

52. Calcule los volúmenes de los sólidos que se obtienen al girar la región limitada por las curvas $y = x$ y $y = x^2$ en torno a los siguientes ejes

(a) el eje x (b) el eje y (c) $y = 2$

53. Encuentre el volumen del sólido generado por la rotación de la región del primer cuadrante limitada por la curva $y^2 = x^2$, la recta $x = 4$ y el eje x.

(a) alrededor de $x = 4$ (b) alrededor de $y = 8$

54. Encuentre el volumen del sólido generado por la rotación de la región en el primer cuadrante aislada por la curva $y^2 = x^3$, la recta $y = 8$ y el eje y.

(a) alrededor de $x = 4$ (b) alrededor de $y = 8$

55. Sea R la región del primer cuadrante limitada por las curvas $y = x^3$ y $y = 2x - x^2$. Calcule las siguientes cantidades

(a) El área de R.
(b) El volumen que se obtiene al hacer girar R alrededor del eje x.
(c) El volumen que se obtiene al hacer girar R alrededor del eje y.

56. Sea R la región limitada por las curvas $y = 1/x^3$, $x = 1$, $x = 3$ y $y = 0$. Formule, pero no calcule, integrales para cada uno de las siguientes cantidades

(a) El área de R.
(b) El volumen del sólido obtenido cuando R gira alrededor del eje y.
(c) El volumen del sólido que se obtiene cuando R gira alrededor de la recta $y = -1$.
(d) El volumen del sólido que se obtiene mediante la rotación de R alrededor de $x = 4$.

57. Siga las instrucciones del problema 56 para la región limitada por $y = x^3 + 1$ y $y = 0$ entre $x = 0$ y $x = 2$.

58. Aplique el método de las envolventes cilíndricas para calcular el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar en torno al eje x la región limitada por las curvas dadas

1. $x = \sqrt[4]{y}, \quad x = 0, \quad y = 16$; 2. $x = y^2, \quad x = 0, \quad y = 2, \quad y = 5$; 3. $y = x^2, \quad y = 9$

4. $y^2 - 6y + x = 0, \quad x = 0$; 5. $y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad x + y = 2$; 6. $y = x, \quad x = 0, \quad x + y = 2$

59. Utilice el método de las envolventes cilíndricas para calcular el volumen del sólido que se genera al hacer girar en torno al eje y la región limitada por las curvas dadas

1. $y = x^2, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2$
2. $y = 1/x, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 10$
3. $y^2 = x, \quad x = 2y$
4. $y = \operatorname{sen}\left(x^2\right), \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = \sqrt{\pi}$
5. $y = x^2, \quad y = 4, \quad x \geq 0$
6. $y = \sqrt{4 + x^2}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 4$
7. $y = x^2 - x^3, \quad y = 0$
8. $y = -x^2 - 6x + 10, \quad y = -x^2 + 6x - 6, \quad x = 0$
9. $y = -x^2 + 4x - 3, \quad y = 0$
10. $y = x - 2, \quad y = \sqrt{x - 2}$

60. Aplique el método de las envolventes cilíndricas para calcular el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar en torno al eje indicado la región limitada por las curvas dadas. Dibuje la región y una corteza representativa.

    (a) $y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 4;$ alrededor del eje y.

    (b) $y = x^2, \quad y = 0, \quad x = -2, \quad x = -1;$ alrededor del eje y.

    (c) $y = x^2, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2;$ alrededor de $x = 1$.

    (d) $y = x^2, \quad y = 0, \quad x = -2, \quad x = -1;$ alrededor de $x = 4$.

    (e) $y = \sqrt{x-1}, \quad y = 0, \quad x = 5,$ alrededor de $y = 3$.

    (f) $y = 4x - x^2, \quad y = 8x - 2x^2,$ alrededor de $x = -2$.

61. Establezca, pero no evalúe, una integral para el volumen del sólido que se genera al hacer girar la región limitada por las curvas dadas en torno al eje indicado.

    (a) $y = \operatorname{sen} x, \quad y = 0, \quad x = 2\pi, \quad x = 3\pi;$ alrededor del eje y.

    (b) $y = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 3;$ alrededor del eje y.

    (c) $y = -x^2 + 7x - 10, \quad y = x - 2,$ alrededor del eje x.

    (d) $x = \cos y, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad y = \pi/4;$ alrededor del eje x.

    (e) $y = x^4, \quad y = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi x}{2}\right), \quad x = 5,$ alrededor de $x = -1$.

    (f) $x = 4 - y^2, \quad x = 8 - 2y^2,$ alrededor de $y = 5$.

62. Halle el volumen del sólido que se genera al girar la región limitada por las curvas $y = 3 - \sqrt{1 - x^2}$, $y = |x|$, $x = -1$ y $x = 1$, alrededor de $y = 3$.

63. Las integrales que se proporcionan a continuación representan volumenes de sólidos. Describa los sólidos correspondientes.

    1. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} 2\pi x \; \cos x \; dx$
    2. $\displaystyle\int_0^{9} 2\pi y^{3/2} \; dy$
    3. $\displaystyle\int_0^{1} 2\pi \left(x^3 - x^7\right) \; dx$
    4. $\displaystyle\int_0^{\pi} 2\pi \left(4 - x\right) \operatorname{sen}^4 x \; dx$
    5. $\displaystyle\int_0^{\pi} \pi \operatorname{sen}^2 x \; dx$
    6. $\displaystyle\int_0^{2} 2\pi y \left(4 - y^2\right) \; dy$

64. La región limitada por las curvas dadas se hace girar en torno al eje indicado. Calcule, por cualquier método, el volumen del sólido resultante

    (a) $y = x^2 + x - 2, \quad y = 0,$ alrededor del eje x.

    (b) $y = x^2 - 3x + 2, \quad y = 0,$ alrededor del eje y.

    (c) $x = 1 - y^2, \quad x = 0,$ alrededor del eje y.

    (d) $y = x\,\sqrt{1 + x^3}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 2;$ alrededor del eje y.

65. Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la región limitada por las curvas $y=|x|$, $y=x^2-4$ y las rectas verticales $x=-2$ y $x=2$, alrededor de la recta $y=3$.

66. Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la región limitada por las curvas $y=|x|$, $y=x^2-8$ y las rectas verticales $x=-2$ y $x=2$, alrededor de la recta $y=3$.

67. Determine la longitud de la gráfica de la ecuación dada en el intervalo indicado

1. $y=x$, $[-1,1]$ 2. $y=x^{3/2}+4$, desde $(0,4)$ hasta $(1,5)$ 3. $y=2x+1$, $[0,3]$

4. $y=3x^{2/3}$, $[1,8]$ 5. $y=\displaystyle\int_1^x \sqrt{u^2-1}\,du$, $1\leq x\leq 2$ 6. $y=\tan x$, $\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$

7. $y=\operatorname{sen} x$, $[0,\pi]$ 8. $y=2\sqrt{x+1}$, $[0,3]$ 9. $5x=y^{5/2}+5y^{-1/2}$, $[4,9]$

10. $x=4-y^{2/3}$, $[1,8]$ 11. $y=\displaystyle\int_{\pi/6}^x \sqrt{64\operatorname{sen}^2 u\cos^2 u-1}\,du$, $\dfrac{\pi}{6}\leq x\leq\dfrac{\pi}{3}$

Respuestas: Ejercicios

1. 72; 2. $\frac{16}{315}$; 3. $\pi h^2\left(r-\frac{h}{3}\right)$; 4. $\frac{r^3}{3}$; 5. $\frac{128}{3}$; 6. 2; 7. $\frac{16}{3}r^3$; 8. $\frac{9\pi}{280}$;
9. $\frac{2}{3}r^3$ pul^3; 10. $\frac{64}{15}$; 11. $\frac{125\sqrt{3}}{3}$; 12.*a*. $\frac{4\pi}{3}$; 12.*b*. $\frac{4\pi}{3}$; 13. $a=\frac{4}{3}$; 14. $\frac{16\sqrt{3}}{3}$;
15. $\frac{4\alpha^5}{5}$; 16. $\frac{h}{6}\left(B_1+4M+B_2\right)$; 17. $\frac{\pi r^2 h}{3}$; 18. $\frac{\pi h}{3}\left(R^2-Rr+r^2\right)$; 19. $\frac{4h}{3}\left(b^2+ab+a^2\right)$;
20. $\frac{2b^2h}{3}$; 21. $\frac{\sqrt{3}}{12}a^2h$; 22. 10 cm^3; 23. $\frac{16r^3}{3}$; 24. $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 25. 2; 26. $\frac{\pi}{3}$;
27. 3; 28.*a*. $8\pi R\int_0^r\sqrt{r^2-y^2}dy$; 28.*b*. $2\pi^2r^2R$; 29. $\frac{128}{9}\sqrt{3}$; 30. $\frac{5}{12}\pi r^3$; 31. $\frac{\sqrt{3}}{6}a^3$;
32. $\frac{72}{35}\pi$; 33. $\frac{16}{3}r^3$; 34. $\frac{2}{3}\sqrt{3}r^3$ pul^3; 35. $\frac{4}{3}\sqrt{3}r^3$; 36. $\frac{8}{3}r^3$; 37. $\frac{a^2h}{3}$; 38. 80π;
39. 1944 pul^3; 40. ; 41.1. $\frac{64}{5}\pi$; 41.2. $\frac{381}{7}\pi$; 41.3. $\frac{128}{7}\pi$; 41.4. 20π; 41.5. $\frac{3}{4}\pi$; 41.6. 9π;
42.1. $\frac{32}{5}\pi$; 42.2. $\frac{10}{3}\pi$; 42.3. 8π; 42.4. 36π; 42.5. $\frac{96}{5}\pi$; 42.6. $\frac{64}{5}\pi$; 43.1. $\frac{16}{15}\pi$; 43.2. $\frac{25}{4}\pi$;
43.3. $\frac{64}{15}\pi$; 43.4. $\frac{4}{3}\pi$; 43.5. $\frac{3}{5}\pi$; 43.6. $\frac{256}{15}\pi$; 44. $\frac{4ab^2}{3}\pi$; 45. $\frac{32}{15}\pi$; 46. $\frac{64}{5}\pi$;
47. $\pi\left(\frac{h^3}{3}+\frac{2}{3}r^3-h^2r\right)$, $V=\pi\left(hr^2-\frac{h^3}{3}\right)$; 48. $r\pi^2$; 49. $\frac{2}{3}\pi$; 50. 2π; 51. 16π; 52.*a*. $\frac{2\pi}{15}$;
52.*b*. $\frac{\pi}{6}$; 52.*c*. $\frac{8\pi}{15}$; 53.*a*. $\frac{1024}{35}\pi$; 53.*b*. $\frac{704}{5}\pi$; 54.*a*. $\frac{3456}{35}\pi$; 54.*b*. $\frac{576}{5}\pi$; 55.*a*. $\frac{37}{12}$;
55.*b*. $\frac{531}{35}\pi$; 55.*c*. $\frac{63}{10}\pi$; 56.*a*. $\frac{4}{9}$; 56.*b*. $\frac{4}{3}\pi$; 56.*c*. $\frac{20}{9}\pi$; 56.*d*. $\frac{20}{9}\pi$; 57.*a*. 6; 57.*b*. $\frac{84}{5}\pi$;
57.*c*. $\frac{144}{5}\pi$; 57.*d*. $\frac{156}{5}\pi$; 58.1. $\frac{4096}{9}\pi$; 58.2. $\frac{609}{2}\pi$; 58.3. $\frac{1944}{5}\pi$; 58.4. 216π; 58.5. $\frac{5}{6}\pi$;
58.6. 2π; 59.1. $\frac{15}{2}\pi$; 59.2. 18π; 59.3. $\frac{64}{15}\pi$; 59.4. 2π; 59.5. 8π; 59.6. $\frac{16\pi}{3}\left(5\sqrt{5}-1\right)$;
59.7. $\frac{\pi}{10}$; 59.8. $\frac{256}{27}\pi$; 59.9. $\frac{16}{3}\pi$; 59.10. $\frac{4}{5}\pi$; 60.*a*. $\frac{124}{5}\pi$; 60.*b*. $\frac{15}{2}\pi$; 60.*c*. $\frac{17}{6}\pi$; 60.*d*. $\frac{67}{6}\pi$;
60.*e*. $\frac{136}{3}\pi$; 60.*f*. $\frac{256}{3}\pi$; 61.*a*. $V=2\pi\int_{2\pi}^{3\pi}x\operatorname{sen}x\,dx$; 61.*b*. $V=2\pi\int_0^3\frac{x}{1+x^2}\,dx$;
61.*c*. $V=\pi\int_2^4\left(\left(7x-x^2-10\right)^2-(x-2)^2\right)\,dx$; 61.*d*. $V=2\pi\int_0^{\pi/4}y\cos y\,dy$;
61.*e*. $V=2\pi\int_0^1(x+1)\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)-x^4\right)\,dx+2\pi\int_1^5(x+1)\left(x^4-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)\,dx$; 61.*f*. $V=2\pi\int_{-2}^2(5-y)\left(4-y^2\right)\,dy$;
62. $\frac{34}{3}\pi$; 63.1. Región : $f(x)=\cos x$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, Eje de revolución : y;
63.2. Región : $f(y)=y^{3/2}$, $y=0$, $y=9$, Eje de revolución : x;
63.3. Región : $f(x)=x^2-x^6$, $x=0$, $x=1$, Eje de revolución : y;
63.4. Región : $f(x)=\operatorname{sen}^4 x$, $x=0$, $x=\pi$, Eje de revolución : $x=4$;
63.5. Región : $f(x)=\operatorname{sen}^2 x$, $x=0$, $x=\pi$, Eje de revolución : x;
63.6. Región : $f(y)=4-y^2$, $x=0$, $x=2$, Eje de revolución : x; 64.*a*. $\frac{81}{10}\pi$; 64.*b*. $\frac{1}{2}\pi$; 64.*c*. $\frac{16}{15}\pi$;
64.*d*. $\frac{104}{9}\pi$;

Bibliografía

1. **Purcell, E. - Varberg, D. - Rigdon, S.**: "*Cálculo*". Novena Edición. PEARSON Prentice Hall.

 Farith J. Briceño N. farith.math@gmail.com

2. **Stewart, J.**: "*Cálculo*". Grupo Editorial Iberoamericano.
3. **Thomas, George**: "*Cálculo de una variable*". 12ma edición. Pearson.
4. **Larson - Hostetler - Edwards**, "*Cálculo*". Vol. 1. Mc Graw Hill.
5. **Leithold, Louis**, "*El cálculo con geometría analítica*". Harla S.A.

Este material ha sido revisado recientemente, pero esto no garantiza que esté libre de errores, por esa razón se agradece reportar cualquier error que usted encuentre en este material enviando un mensaje al correo electrónico

farith.math@gmail.com

indicando donde se encuentra(n) dicho(s) error(es). **MUCHAS GRACIAS**.